

ISSN 1609-364X (print)

# ГЕОИНФОРМАТИКА

Журнал о геоинформационных технологиях  
в геологии, землепользовании, геоэкологии

1

Издается  
с 1992 года

2024



# GEOINFORMATIKA

Journal of geoinformation technologies  
in geology, land use, geoecology

Since 1992

Геоинформатика. 2024. № 1. С. 28–34.

*Geoinformatika*. 2024;(1):28–34.

### Моделирование геообъектов и геопроцессов

Научная статья

УДК 556.537

<https://doi.org/10.47148/1609-364X-2024-1-28-34>

## Определение кривизны русла в модели картографического прогноза меандрирования реки

© 2024 г. — Ирина Константиновна Лурье

Географический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова; Россия, Москва

[lurie@mail.ru](mailto:lurie@mail.ru)

**Аннотация:** Статья является развитием предыдущей работы автора, направленной на прогноз смещений русел в процессе меандрирования равнинных рек. В качестве основной гипотезы о причинах меандрирования принята гипотеза о неустойчивости прямолинейного русла реки. Для построения модели меандрирования используется утверждение, согласно которому русло реки смещается от своего текущего положения по нормали к динамической оси потока в направлении от центра его кривизны пропорционально значению кривизны русла в данном сечении, причем коэффициент пропорциональности заранее неизвестен и подлежит определению в процессе картографического (гидрологического) мониторинга. Поскольку кривизна речного русла выражается через вторую производную кривой, аппроксимирующей очертание берега, то важен вопрос о том, как достаточно точно вычислить эту кривизну по координатам точек берега. Предлагается способ, как это сделать на основе аппроксимации береговой линии сплайном 2-го порядка в виде окружности, наиболее тесно примыкающей к береговой линии. Поскольку гидрологический мониторинг позволяет найти нормальные смещения русла за некоторый промежуток времени, то, зная кривизны береговой линии во всех сечениях русла, можно вычислить неизвестный коэффициент пропорциональности этого смещения кривизне. Полученные значения такого коэффициента предлагается использовать для прогнозного картографирования динамики русла на будущие интервалы времени.

**Ключевые слова:** *русло, река, меандрирование, смещение русла, кривизна, центр кривизны, аппроксимация, сплайн, метод наименьших квадратов, цифровая трансформация координат, алгоритм, гидрологический мониторинг*

*Для цитирования:* Лурье И.К. Определение кривизны русла в модели картографического прогноза меандрирования реки // Геоинформатика. — 2024. — № 1. — С. 28–34. <https://doi.org/10.47148/1609-364X-2024-1-28-34>.

### Modeling of geological objects and geoprocesses

Original article

## Determination of channel curvature in the map forecast model of river meandering

© 2024 — Irina K. Lurie

Faculty of Geography, Lomonosov Moscow State University; Moscow, Russia

[lurie@mail.ru](mailto:lurie@mail.ru)

**Abstract:** The article is a development of the author's previous work aimed at predicting channel displacements during the meandering of lowland rivers. The hypothesis about the instability of a straight river bed is accepted as the main hypothesis about the causes of meandering. To construct a meandering model, a statement is used according to which the river bed shifts from its current position along the normal to the dynamic axis of the flow in the direction from the center of its curvature in proportion to the value of the curvature of the channel in a given section, and the proportionality coefficient is unknown in advance and must be determined in the process of cartographic (hydrological) monitoring. Since the curvature of a river channel is expressed through the second derivative of a curve that approximates the outline of the bank, the important question is how to accurately calculate this curvature from the coordinates of bank points. A way to do that is proposed in the article. This way is based on approximating the coast-line with a 2nd order spline in the form of a circle most closely adjacent to the coastline. Since hydrological monitoring makes it possible to find normal channel displacements over a certain period of time, then knowing the curvature of the coastline in all sections of the channel, it is possible to calculate the unknown coefficient of proportionality of this displacement to the curvature. The obtained values of the coefficient of proportionality are proposed to be used for predictive mapping of channel dynamics for future time intervals.

**Key words:** *channel, river, meandering, river bed channel displacement, curvature, center of curvature, approximation, spline, least squares method, digital coordinate transformation, algorithm, hydrological monitoring*

*For citation:* Lurie I.K. Determination of channel curvature in the map forecast model of river meandering. *Geoinformatika*. 2024;(1):28–34. <https://doi.org/10.47148/1609-364X-2024-1-28-34>. In Russ.

## Введение

В данной статье, как и в нашей предыдущей работе [5], речь идет о хорошо известном, но в какой-то мере остающимся загадочным явлением — меандрировании равнинных рек, то есть о возникновении и развитии их извилистости. До сих пор вызывает удивление и восхищение сложная конфигурация русел таких рек, в которой, тем не менее, прослеживается определенная периодичность расположения последовательных меандр. Еще большее удивление вызывает тот факт, что эти меандры не остаются статичными, а с течением времени развиваются, изменяя свое положение и форму, а зачастую и вовсе исчезают; при этом русла рек самопроизвольно спрямляются, образуя всем известные старицы.

Существуют различные гипотезы о причинах наблюдаемого явления. В числе причин, обуславливающих блуждание динамической оси потока, часто называются: возникновение в реках поперечной циркуляции воды; наличие на пути течения реки случайных препятствий; вращение Земли и Кориолисово ускорение; неустойчивость прямолинейного движения потока к гармоническим возмущениям; ограничения транспортирующей способности потока; законы природы, стремящиеся минимизировать диссипацию механической энергии и т. п. Обзоры гипотез о причинах меандрирования русел содержатся в трудах отечественных и зарубежных исследователей: Н.И. Маккавеева (1950, 1955, 1969), Н.Н. Федорова (1954); Н.Е. Кондратьева (1959, 1982), А.Н. Ляпина (1956), С.Т. Yang (1971), D.Knighton (1987), В.И. Замышляева (1978), Б.В. Матвеева (1985), и др. Подробный анализ отечественных и зарубежных работ, посвященных этому вопросу, можно найти во многих работах: Н.И. Маккавеева [6], М.А. Великанова [1], Н.Е. Кондратьева [4], Р.С. Чалова [2, 7], А.С. Завадского [2], В.И. Замышляева [3], и др. Следует также отметить доклад В.А. Широковой и А.В. Собисевич [8] с анализом работ М.А. Великанова о циркуляции потока в русле меандрирующих рек, сделанный на годичной научной конференции Института естествознания и техники им. С.И. Вавилова (2020). Однако до сих пор не существует единого мнения о причинах наблюдаемого явления и, тем более, о методах его моделирования и прогнозирования.

В нашей предыдущей работе [5] в качестве основной рабочей гипотезы принималось и обосновывалось положение о причине меандрирования равнинных рек как о результате неустойчивости прямолинейного характера их русла. На изгибах русла поток текущей воды разрушает внешний берег, причем разрушение происходит тем интенсивней, чем больше кривизна русла в данном сечении (напомним, что кривизна кривой — это величина, обратная радиусу окружности, наиболее тесно прилегающей к кривой в рассматриваемой точке). Допустим, на русле возникло выпуклое возмущение,

заставляющее реку изменить направление динамической оси потока. Поскольку сила, воздействия реки на наружный берег изгиба русла пропорциональна произведению квадрата скорости течения реки на величину кривизны, то в пределах этого возмущения начинается более интенсивный размыв берега и унос продуктов разрушения течением, поэтому возникшее возмущение начинает увеличиваться в размерах. Размыв берега существует и на прямолинейных участках реки (где кривизна русла равна или близка к нулю), однако его интенсивность несопоставимо меньше интенсивности размыва берега на изгибах русла.

Происходящий процесс соответствует известной загадке: «Что это такое — чем больше из нее берут, тем больше она становится? Ответ: яма». В этой загадке образно изложена причина, почему возникшее возмущение начинает увеличиваться в размерах. В отличие от многих явлений физики, в которых малые возмущения стационарно протекающих процессов со временем затухают (выравниваются) из-за диссипативных процессов, меандрирование равнинных рек является примером противоположного процесса — малые отклонения русла от прямолинейного не только не затухают, а наоборот, развиваются и увеличиваются в размерах. На основе принятой гипотезы в упомянутой выше статье [5] показывалось, что расчет перемещения речного русла в общем случае сводится к решению дифференциального уравнения второго порядка «типа теплопроводности», однако не с положительным, а с отрицательным коэффициентом дисперсии. В частности, из этого уравнения следовало, что любые малые возмущения прямолинейности русла не затухают, как в задачах для обычного уравнения теплопроводности, а наоборот, увеличиваются в размерах.

В данной работе, являющейся развитием указанной выше теории, вопрос о меандрировании равнинных рек рассматривается под углом зрения прогнозного картографирования. Иными словами, ставится вопрос о том, как картографическими методами прогнозировать перемещение русла реки в зависимости от времени, то есть, как найти положение русла реки в последующие моменты времени, если известно его положение в предыдущие моменты?

## Формулировка вопроса

Поскольку целью прогнозного картографирования является предсказание положения русла в последующие моменты времени по известному его положению в предыдущий момент времени, то нуждается в дополнительном пояснении сам термин «смещение русла». В теории русловых процессов прочно вошли понятия о «поперечном» и «продольном» смещениях русла. Мол, русло реки смещается как перпендикулярно направлению динамической оси потока, так и вдоль него. Несмотря

на кажущуюся правдоподобность такого утверждения, оно полностью несостоятельно. Берег реки — это не набор одних и тех же материальных точек, а лишь кривая, представляющая собой геометрическое место точек, совпадающих с точками поверхности земли, в которых находится берег в данный момент времени. В следующий момент времени это будут уже другие точки поверхности земли. Береговая кривая наподобие тени от предмета перемещается по земной поверхности, постоянно изменяя свои размеры и очертания. Поэтому сравнивая между собой две береговые кривые, относящиеся к разным моментам времени, невозможно сказать, какому положению в начальный момент времени соответствует данная точка берега в конечный момент времени.

В математике определено лишь смещение кривой за бесконечно малый промежуток  $\Delta t_0$  времени, определяемое как расстояние по нормали  $\vec{n}_0$  от выбранной точки кривой в начальном положении до кривой в новом близком к ней положении. Поскольку в следующий момент времени кривая изменит свое положение и форму на плоскости, то смещения за новый малый промежуток  $\Delta t_1$  времени будут происходить уже в направлении новых нормалей  $\vec{n}_1$ , не совпадающих с прежними нормальями, так что кривая будет перемещаться по плоскости, изменяя не только свое положение, но и форму. Перемещение береговой кривой за конечный промежуток  $T$  времени является суперпозицией большого числа смещений этой кривой за малые промежутки  $\Delta t_i$  ( $T = \sum_{i=0}^m \Delta t_i$ ) времени. Вот почему, сравнивая береговые кривые русла в начальный и конечный момент времени, нельзя однозначно выделить «продольного» и «поперечного» смещения. Поэтому, говоря о законах трансформации русла за конечные промежутки времени, следует остановиться, прежде всего, на элементарных (малых) его смещениях.

В качестве основного положения принимается утверждение, согласно которому русло реки смещается за малый промежуток времени от своего текущего положения по нормали к динамической оси потока в направлении от центра его кривизны пропорционально кривизне русла в данном сечении. Коэффициент пропорциональности заранее неизвестен и подлежит определению в процессе гидрологического (или картографического) мониторинга. Этот коэффициент зависит от многих факторов — от почвы местности, по которой протекает река, от растительности, покрывающей ее берега, от сезонных колебаний уровня воды и т. д. Гидрологические наблюдения позволяют вычислять нормальные смещения русла реки за небольшие промежутки времени, поэтому по кривизне береговой линии, можно рассчитать заранее неизвестные коэффициенты пропорциональности. Полученные значения можно использовать в прогнозном кар-

тографировании положения русла реки в будущие моменты времени.

### Определение кривизны береговой линии русла

Возникает вопрос, как определить кривизну речного русла в произвольном его сечении по координатам точек его берега. В нашей предыдущей работе предлагалось рассчитывать кривизну речного русла по 3-м близким точкам его берега. Поскольку через любые 3 точки можно провести единственную окружность, то центр  $(x_0, y_0)$  такой окружности являлся бы центром кривизны берега, а величина  $\kappa = R^{-1}$ , обратная радиусу окружности, давала бы его кривизну в вершине треугольника выбранных точек. Однако такой, казалось бы, простой и естественный способ определения кривизны, обладает существенным недостатком. Поскольку координаты  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , близких точек берега определяются с некоторой погрешностью, то центр кривизны и само значение кривизны испытывают существенные (конечные) изменения при малых погрешностях в определении координат этих точек.

С целью устранения возникающих погрешностей предлагается аппроксимировать береговую кривую окружностью, проходящей не через 3 близкие точки его берега, а через большее число  $n$  точек так, чтобы сумма квадратов отклонения этих точек от окружности была минимальной. Иными словами, для нахождения центра кривизны и самой кривизны предлагается использовать сплайн второго порядка, причем полином второго порядка сразу же полагается окружностью с неизвестными заранее и подлежащими определению центром  $O(x_0, y_0)$  и радиусом  $R$ , то есть имеющим уравнение

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (1)$$

Для определения неизвестных параметров  $(x_0, y_0, R)$  используется метод наименьших квадратов, согласно которому функция  $G(x_0, y_0, R)$ , определяемая выражением

$$G(x_0, y_0, R) = \sum_{i=1}^n \left[ (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - R^2 \right]^2, \quad (2)$$

где  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  — точки, принадлежащие берегу, должна иметь минимальное значение.

$$G(x_0, y_0, R) = \sum_{i=1}^n \left[ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 \right]^2 \rightarrow \min. \quad (3)$$

Число  $n$  рассматриваемых точек может быть произвольно, однако множество этих точек должно удовлетворять требованию близости к центральной точке множества, а точнее, чтобы длина дуги между крайними точками множества была намного меньше определяемого радиуса кривизны.

Для минимизации функции  $G(x_0, y_0, R)$  используются соотношения, характерные для метода наименьших квадратов:

$$1. \frac{dG}{dR} = 0 \Rightarrow -2 \sum_{i=1}^n \left[ (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - R^2 \right] \cdot 2R = 0,$$

$$\text{или } R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \left[ (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 \right]}{n}. \quad (4)$$

$$2. \frac{dG}{dx_0} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \sum_{i=1}^n \left[ (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - R^2 \right] \cdot 2(x_i - x_0) = 0,$$

$$\text{или } \sum_{i=1}^n (x_i - x_0) \cdot \left[ (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - R^2 \right] = 0. \quad (5)$$

$$3. \frac{dG}{dy_0} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \sum_{i=1}^n \left[ (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - R^2 \right] \cdot 2(y_i - y_0) = 0,$$

$$\text{или } \sum_{i=1}^n (y_i - y_0) \cdot \left[ (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - R^2 \right] = 0. \quad (6)$$

Условие (2) приводит к первому линейному уравнению для координат  $(x_0, y_0)$  центра окружности. Имеем:

$$x_0 \cdot \left[ \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n} \right] + y_0 \cdot \left[ \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)}{n} \right] = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^3 + \sum_{i=1}^n x_i y_i^2}{2} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{2n} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 \right).$$

Условие (3) приводит ко второму линейному уравнению для координат  $(x_0, y_0)$  центра окружности. Имеем:

$$x_0 \cdot \left[ \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)}{n} \right] + y_0 \cdot \left[ \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2}{n} \right] = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^3 + \sum_{i=1}^n y_i x_i^2}{2} - \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{2n} \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 + \sum_{k=1}^n y_k^2 \right).$$

Таким образом, приходим к системе 2-х линейных уравнений для определения двух неизвестных и  $x_0$  и  $y_0$ . Имеем:

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 = b_1, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 = b_2, \end{cases} \quad (7)$$

где коэффициенты  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  и  $b_1, b_2$  имеют вид:

$$a_{11} = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2, \quad a_{22} = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2,$$

$$a_{12} = a_{21} = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right),$$

$$b_1 = 0,5 \cdot \left[ \sum_{i=1}^n x_i^3 + \sum_{i=1}^n x_i y_i^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \right],$$

$$b_2 = 0,5 \cdot \left[ \sum_{i=1}^n y_i^3 + \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \cdot \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \right].$$

Радиус  $R_i$  окружности кривизны вычисляется по формуле:

$$R_i = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left[ (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 \right]}{n}}. \quad (8)$$

С помощью определителей  $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ ,  $\Delta_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$  и  $\Delta_2 = b_2a_{11} - b_1a_{12}$  решение системы (7) уравнений находится по известному правилу Крамера

$$x_0 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad y_0 = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \quad (9)$$

Таким образом, система уравнений (7) и формулы (8) и (9) позволяют вычислить координаты центра  $O(x_0, y_0)$  кривизны береговой кривой в средней из  $n$  рассматриваемых близких точек этой линии и ее кривизну  $\kappa = R^{-1}$ .

#### Алгоритм цифровой трансформации кривой береговой линии русла

Пусть береговая линия характеризуется множеством  $m$  точек  $(x_i, y_i)$ ,  $x = 1, 2, 3, \dots, m$ , а  $n$  – некоторое нечетное число точек с точкой  $(x_s, y_s)$  в центре, где  $2n + 1 \leq s \leq n - (2s + 1)$ :

$$\left( \begin{array}{c} x_1, x_2, x_3, \dots, \\ \underbrace{x_{m-(2n+1)}, x_{m-(2n-1)}, \dots, x_s, \dots, x_{s+(2n-1)}, x_{s+(2n+1)}, \dots, x_m}_n \\ y_1, y_2, y_3, \dots, \\ \underbrace{y_{m-(2n+1)}, y_{m-(2n-1)}, \dots, y_s, \dots, y_{s+(2n-1)}, y_{s+(2n+1)}, \dots, y_m}_n \end{array} \right) \quad (10)$$

Найдем центр кривизны  $O_s(x_0^{(s)}, y_0^{(s)})$  и радиус кривизны береговой линии в произвольной точке  $(x_s, y_s)$ .

По формулам (7)–(9) вычисляем величины  $x_0^{(s)}$ ,  $y_0^{(s)}$ ,  $R_s$  и, следовательно, кривизну  $\kappa_s = 1/R_s$ . Далее строим единичный вектор  $\vec{n}_s$  нормали к береговой линии в точке  $(x_s, y_s)$ . Для этого нормируем вектор, идущий из центра  $O_s(x_0^{(s)}, y_0^{(s)})$  кривизны в точку  $(x_s, y_s)$  береговой линии. Получаем:

$$\vec{n}_s = \frac{\{x_s - x_0^{(s)}, y_s - y_0^{(s)}\}}{\sqrt{(x_s - x_0^{(s)})^2 + (y_s - y_0^{(s)})^2}}. \quad (11)$$

Наконец, определяем координаты  $(x_s)_{нов}$  и  $(y_s)_{нов}$  точки новой береговой линии:

$$\begin{cases} (x_s)_{\text{нов}} = x_s + k_s \cdot \frac{\kappa_s (x_s - x_0^{(s)})}{\sqrt{(x_s - x_0^{(s)})^2 + (y_s - y_0^{(s)})^2}}, \\ (y_s)_{\text{нов}} = y_s + k_s \cdot \frac{\kappa_s (y_s - y_0^{(s)})}{\sqrt{(x_s - x_0^{(s)})^2 + (y_s - y_0^{(s)})^2}}. \end{cases} \quad (12)$$

**Пример расчета**

В качестве примера расчета приведем 600-метровый извилистый участок р. Вязёмка, тот же самый, что и в нашей предыдущей работе [5]. Эта река является правым притоком реки Москвы между его устьем и Рублево-Успенским шоссе, рис. 1 (траектория русла в начальный момент времени  $t = 0$  изображена синим цветом). На рассматриваемом участке реки взяты 107 характерных точек так, чтобы они достаточно точно аппроксимировали форму русла. В локальной системе декартовых координат с осью абсцисс, направленной вдоль шоссе, и началом отсчета на 23-м км, значения координат выделенных точек приведены в таблице 1.

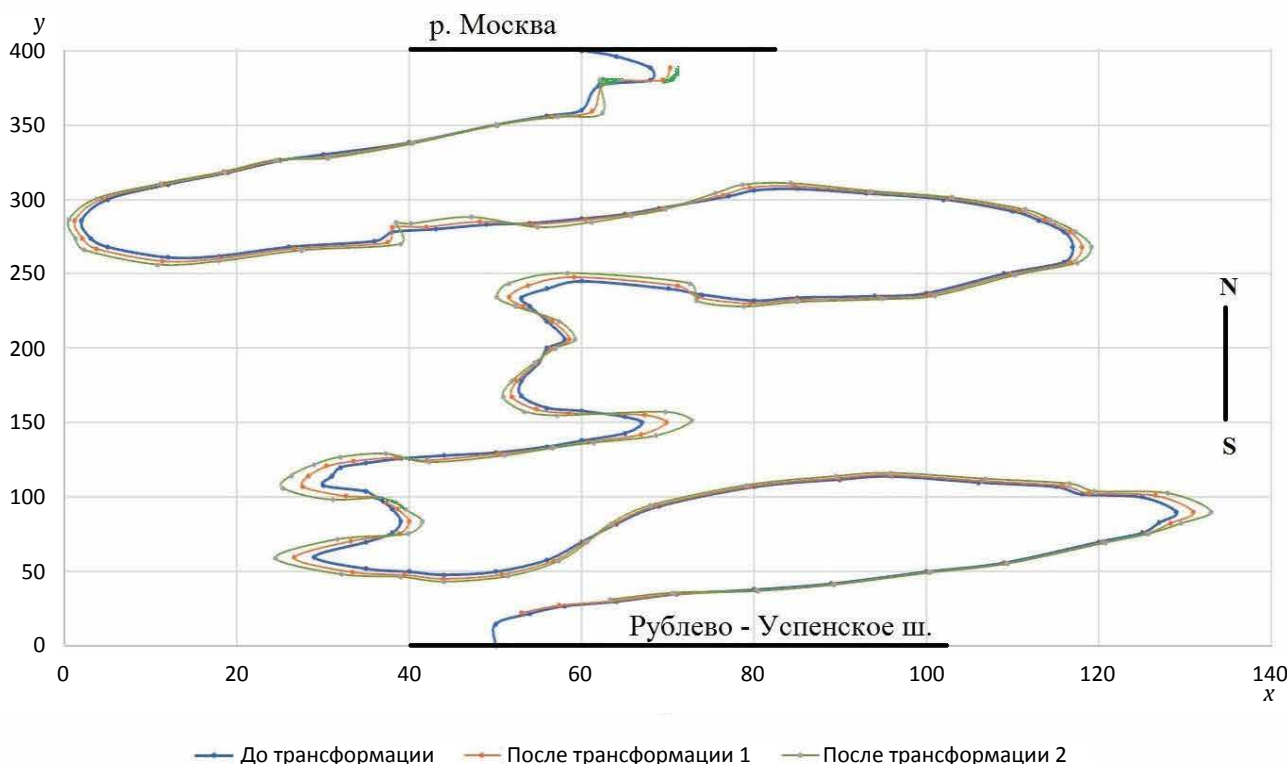
Для расчета трансформации русла в произвольной точке  $(x_s, y_s)$ , принадлежащей массиву (10), используем предлагаемый алгоритм нахождения кривизны русла по 5 точкам ( $n = 5$ ), т.е. по координатам самой точки и координатам двух ближайших к ней точек  $(x_{s-2}, y_{s-2})$ ,  $(x_{s-1}, y_{s-1})$  и  $(x_{s+1}, y_{s+1})$ ,  $(x_{s+2}, y_{s+2})$ , слева и справа, соответственно.

В результате трансформации русла реки по предложенному алгоритму получается новый массив точек  $(x'_s, y'_s)$ , описывающих положение русла в последующий момент времени (к какому именно моменту времени относится это новое положение русла, определяется коэффициентом пропорциональности [5]). Результаты трансформации русла от исходного состояния до конечного изображены на рис. 1 линией коричневого цвета. Затем полученные точки  $(x'_s, y'_s)$ , использовались в качестве начальных для осуществления следующей трансформации с тем же коэффициентом пропорциональности, в результате которой был рассчитано новое положение  $(x''_s, y''_s)$  русла. Результаты этой трансформации представлены на рис. 1 линией красного цвета. Из рисунка видно, что смещение русла от первоначального положения особенно заметно в точках с максимальной кривизной, причем в рассмотренном примере оно составляло 8–12 м.

Можно было бы и далее продолжать этот процесс, однако прежде всего следует выявить коэффициент пропорциональности по данным картографического мониторинга. В приведенных трансформациях параметр  $k$  полагался одинаковым и равным 30 для всех точек русла. Однако точные его значения могут быть установлены только на основе данных мониторинга реальных смещений русла.

**Рис. 1.** Результаты численной трансформации русла р. Вязёмка ( $k = 30$ )

*Fig. 1. Results of a numerical transformation of the Vyazemka riverbed*



**Табл. 1.** Точечная аппроксимация русла реки Вязёмка

*Tab. 1. Point approximation of the Vyazemka riverbed*

$i$	$(x_i, y_i), \text{ м}$	$i$	$(x_i, y_i), \text{ м}$	$i$	$(x_i, y_i), \text{ м}$	$i$	$(x_i, y_i), \text{ м}$	$i$	$(x_i, y_i), \text{ м}$
1	(50,0)	23	(64,82)	45	(56,134)	67	(94,235)	89	(18,262)
2	(50,15)	24	(60,70)	46	(60,138)	68	(100,237)	90	(12,261)
3	(54,22)	25	(64,82)	47	(65,143)	69	(109,250)	91	(5,268)
4	(58,27)	26	(60,70)	48	(67,150)	70	(116,258)	92	(3,274)
5	(64,30)	27	(56,58)	49	(65,154)	71	(117,268)	93	(2,286)
6	(71,35)	28	(56,356)	50	(60,158)	72	(116,278)	94	(5,300)
7	(80,38)	29	(60,360)	51	(56,160)	73	(113,286)	95	(12,310)
8	(89,42)	30	(29,60)	52	(53,168)	74	(110,292)	96	(19,318)
9	(100,50)	31	(35,70)	53	(53,178)	75	(102,300)	97	(25,326)
10	(109,56)	32	(38,76)	54	(55,190)	76	(93,304)	98	(30,330)
11	(120,70)	33	(39,84)	55	(56,200)	77	(85,307)	99	(40,338)
12	(125,76)	34	(38,92)	56	(58,206)	78	(80,306)	100	(50,350)
13	(127,83)	35	(37,97)	57	(56,218)	79	(77,302)	101	(56,356)
14	(129,90)	36	(36,100)	58	(54,228)	80	(69,294)	102	(60,360)
15	(125,100)	37	(35,104)	59	(53,234)	81	(65,290)	103	(62,376)
16	(118,102)	38	(30,108)	60	(56,240)	82	(60,287)	104	(68,380)
17	(115,107)	39	(31,114)	61	(60,245)	83	(54,284)	105	(68,388)
18	(106,110)	40	(32,120)	62	(65,246)	84	(49,283)	106	(64,396)
19	(96,114)	41	(35,123)	63	(70,240)	85	(43,280)	107	(60,400)
20	(90,112)	42	(39,126)	64	(74,236)	86	(38,278)		
21	(80,107)	43	(44,128)	65	(80,232)	87	(36,272)		
22	(69,94)	44	(50,130)	66	(85,234)	88	(26,268)		

**Вывод**

Результаты расчетов по предложенному алгоритму позволяют сделать два наиболее важных вывода. Во-первых, алгоритм дает правдоподобную картину деформации русла реки. Некоторые разрывы в точках перегиба русла (то есть в точках, в которых кривизна изменяет свой знак) объясняются некорректностями графопостроителя и относительно большим значением коэффициента  $k$ .

Во-вторых, выполненные расчеты показывают, что кривая нового русла, построенная по предлагаемому алгоритму, оказывается намного более гладкой, чем аналогичная кривая, построенная по алгоритму работы [5]. Иными словами, кривизна русла, рассчитанная по предлагаемому алгоритму, значительно точнее, чем значение, найденное по радиусу окружности, проведенной через 3 точки береговой линии: данную и две соседние с ней точки.

## Список источников

1. Великанов М.А. Русловой процесс (основы теории). – М. : Физматгиз, 1958. – 395 с.
2. Завадский А.С., Чалов Р.С. Региональный анализ свободного меандрирования // Вестник МГУ. Сер. 5: География. – 1997. – № 3. – С. 32–36.
3. Замышляев В.И. О причинах меандрирования рек (обзор зарубежных авторов) // Вопросы гидрологии суши / под ред. М.С. Грушевского и З.Д. Копалиани. – Л. : Гидрометеиздат, 1978. – С. 138–141.
4. Кондратьев Н.Е., Попов И.В., Смищенко Б.Ф. Основы гидроморфологической теории руслового процесса. – Л. : Гидрометеиздат, 1982. – 272 с.
5. Лурье И.К., Лурье М.В. Геоинформационная модель меандрирования рек для картографического прогноза // Геоинформатика. – 2023. – № 2. – С. 9–16. DOI: 10.47148/1609-364X-2023-2-9-16.
6. Маккавеев Н.И. Русло реки и эрозия в её бассейне. – М. : АН СССР, 1955. – 346 с.
7. Чалов Р.С. Русловедение: теория, география, практика. Т. 2: Морфодинамика речных русел. – М. : URSS, 2011. – 955 с.
8. Широкова В.А., Собисевич А.В. М.А. Великанов о циркуляции потока в русле и меандрирующих реках // Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова. Годичная научная конференция (Москва, 30 марта – 3 апреля 2020 г.). – М. : ИИЕТ РАН, 2020. – С. 563–565.

## References

1. Velikanov M.A. Ruslovoi protsess (osnovy teorii) [Riverbed process (basics of the theory)]. Moscow: Fizmatgiz; 1958. 395 p.
2. Zavadskii A.S., Chalov R.S. Regional'nyi analiz svobodnogo meandrirovaniya [Regional analysis of free meandering]. *Lomonosov Geography Journal*. 1997;(3):32–36.
3. Zamyshlyaev V.I. O prichinakh meandrirovaniya rek (obzor zarubezhnykh avtorov) [On the causes of meandering of rivers (review of foreign authors)]. In: *Voprosy gidrologii sushy*. Grushevskii M.S., Kopaliani Z.D., eds. Leningrad: Gidrometeoizdat; 1978. pp. 138–141.
4. Kondrat'ev N.E., Popov I.V., Snishchenko B.F. Osnovy gidromorfologicheskoi teorii ruslovogo protsessa [Fundamentals of the hydromorphological theory of the riverbed process]. Leningrad: Gidrometeoizdat; 1982. 272 p.
5. Lurie I.K., Lurie M.V. Geoinformation model of river meandering for predictive mapping. *Geoinformatika*, 2023;(2):9-16. DOI: 10.47148/1609-364X-2023-2-9-16.
6. Makkaveev N.I. Ruslo reki i ehroziya v ee basseine [Riverbed and erosion in its basin]. Moscow: AN SSSR; 1955. 346 p.
7. Chalov R.S. Ruslovedenie: teoriya, geografiya, praktika. T. 2: Morfodinamika rechnykh rusel [Riverbed studies: theory, geography, practice. Vol. 2: Morphodynamics of riverbeds]. Moscow: URSS; 2011. 955 p.
8. Shirokova V.A., Sobisevich A.V. M.A. Velikanov o tsirkulyatsii potoka v rusle i meandriruyushchikh rekakh [M.A. Velikanov on the circulation of flow in the channel and meandering rivers]. In: *Institut istorii estestvoznaniya i tekhniki im. S.I. Vavilova. Godichnaya nauchnaya konferentsiya* (Moscow, 30 March – 3 April 2020). Moscow: IIET RAN; 2020. pp. 563–565.

Статья поступила в редакцию 16.02.2024, одобрена после рецензирования 20.02.2024, принята к публикации 10.03.2024.  
The article was submitted 16.02.2024; approved after reviewing 20.02.2024; accepted for publication 10.03.2024.

## Информация об авторах

### Лурье Ирина Константиновна

Доктор географических наук, профессор,  
заслуженный профессор МГУ  
Заведующая кафедрой «Картография и геоинформатика»  
Географический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова  
119991 Москва, ГСП-1, Ленинские горы  
e-mail: lurie@mail.ru

## Information about authors

### Irina K. Lurie

Doctor of Geography, Professor, Honored Professor of MSU  
Head of the Department of Cartography and Geoinformatics  
Faculty of Geography of Lomonosov Moscow State University  
GSP-1, Leninskie gory, Moscow, 119991, Russia  
e-mail: lurie@mail.ru