

Геоинформатика. 2025. № 1. С. 35–49.
Geoinformatika. 2025;(1):35–49.

Моделирование геобъектов и геопроцессов

Научная статья
 УДК 550.8.056
<https://doi.org/10.47148/1609-364X-2025-1-35-49>

Определение динамических и кинематических характеристик обменных волн в условиях горизонтальных границ

© 2025 г. — Владимир Ефимович Рок^{а)}, Самуил Абрамович Каплан^{б)}

ФГБУ «Всероссийский научно-исследовательский геологический нефтяной институт» (ФГБУ «ВНИГНИ»); Москва, Россия

^{а)}vladimir.rok@gmail.com, ^{б)}lab6-vniigeosistem@yandex.ru

Аннотация: Рассмотрена задача определения скорости поперечных волн в массиве геологической среды с помощью измерения времени распространения сейсмического сигнала от импульсного источника в виде обменных *PS*-волн с конверсией *P*-волнового падающего сигнала на плоской субгоризонтальной акустически контрастной границе упругих сред. Особенностью рассмотрения является использование алгебраически точного решения параметрически заданного уравнения лучевого *PS*-годографа с учетом волновых коэффициентов конверсии.

Ключевые слова: *многоволновая сейсмика; обменные волны; годограф; системы компьютерной алгебры.*

Для цитирования: Рок В.Е., Каплан С.А. Определение динамических и кинематических характеристик обменных волн в условиях горизонтальных границ // *Геоинформатика*. — 2025. — № 1. — С. 35–49. <https://doi.org/10.47148/1609-364X-2025-1-35-49>.

Modeling of geological objects and geoprocesses

Original article

Determination of dynamic and kinematic characteristics of converted waves under conditions of horizontal boundaries

© 2025 — Vladimir E. Rok^{а)}, Samuil A. Kaplan^{б)}

All-Russian Research Geological Petroleum Institute (VNIGNI); Moscow, Russia

^{а)}vladimir.rok@gmail.com, ^{б)}lab6-vniigeosistem@yandex.ru

Abstract: The problem of determining the velocity of transverse waves in an array of geological medium by measuring the time of propagation of a seismic signal from a pulsed source in the form of *PS* converted waves with conversion of a *P*-wave incident signal on a flat subhorizontal acoustically contrasting boundary of elastic media is considered. The peculiarity of the consideration is the use of an algebraically exact solution of the parametrically specified *PS* beam traveltime equations together with the consideration of the conversion wave coefficients.

Key words: *multiwave seismics; converted waves; traveltime curves; computer algebra systems (CAS).*

For citation: Rok V.E., Kaplan S.A. Determination of dynamic and kinematic characteristics of converted waves under conditions of horizontal boundaries. *Geoinformatika*. 2025;(1):35–49. <https://doi.org/10.47148/1609-364X-2025-1-35-49>. In Russ.

Введение

Расширение информационных возможностей сейсморазведки связано с многоволновым подходом к изучению строения геологического разреза в целом и физических характеристик комплексов пород в частности. При этом предполагается, что геологическая среда достаточно адекватно представлена моделью однородных идеально упругих областей твердого тела с постоянными скоростями распространения волн каждой бегущей волновой моды, взаимодействие и взаимная конверсия которых возможна только на границах однородных твердых идеально упругих областей с плоской тонкой границей без проскальзывания [1]. Возможность представления деформаций в идеально упругих средах в виде суперпозиции компрессионных и сдвиговых составляющих позволяет рас-

сматривать каждую из них в однородной упругой среде как условно независимую составляющую поля упругих деформаций, связь которых обусловлена нарушением однородности в виде границы с другой упругой средой. Проявление этого эффекта принято рассматривать как взаимную конверсию монотипных составляющих волнового поля. Одна из базовых задач, которая возникает при таком подходе, — распространение сигнала в виде двух последовательных монотипных волн: продольной от источника к границе и поперечной от границы к пункту регистрации. Результаты косвенных измерений по сейсмическим наблюдениям сигнала в пунктах регистрации по методу обменных волн позволяют связать их с физическими характеристиками геологической среды. В геофизике методы сейсмических исследований, основанные на ука-

занном эффекте, носят названия «методов обменных волн» [2]. Задача математического описания указанного процесса может быть разделена на динамическую и кинематическую части. Кинематическая задача построения годографов обменных волн рассматривалась численно или как уравнение годографа общей срединной точки (ОСТ PS) на основе приближенного гиперболического годографа с эффективной (приближенно вычисленной) скоростью распространения сейсмического сигнала [3]. Динамической задаче рассеяния падающего волнового сигнала на границе упругих областей с частичной конверсией волн разных типов уделялось меньше внимания. Их точные решения для упругой среды, состоящей из двух идеально упругих полупространств с плоской границей, позволяют связать отношение скоростей распространения поперечных и продольных компонентов сейсмических сигналов с измерениями, использующими определение эффективных (и/или) интервальных скоростей обменных волн для получения значения скорости поперечных волн. Весь анализ намеренно проведен на основе пространственно-временных представлений упругих деформаций и напряжений.

1. Динамика упругих волн

Свободные колебания упругой среды. Уравнение свободных колебаний однородной изотропной идеально упругой среды следует из известного уравнения динамического равновесия для ее элемента [4]

$$\rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = \nabla \cdot \hat{\sigma}, \quad (1.1)$$

где ρ — плотность упругого материала; $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — векторное поле деформаций, т. е. смещений элементов упругой среды с начальным положением \mathbf{x} в эйлеровой системе координат к текущему $\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, а $\hat{\sigma}$ — тензор напряжений, который в идеально упругой среде линейно зависит от тензора деформаций $\hat{\varepsilon}$ по закону Гука и может быть представлен в изотропном случае с помощью двух упругих параметров Ламе λ, μ :

$$Sp(\hat{\varepsilon}) = Tr(\hat{\varepsilon}) \hat{\sigma} = \lambda Sp(\hat{\varepsilon}) \hat{g} + 2\mu \hat{\varepsilon}, \quad (1.2)$$

где $Sp(\hat{\varepsilon}) = Tr(\hat{\varepsilon})$ — след тензора деформации; \hat{g} — метрический тензор, играющий роль единичного элемента в пространстве тензоров (см. приложение 1).

Линеаризация выражения для плотности внутренних сил опирается на условия достаточной малости локальных градиентов деформации $(\nabla \otimes \mathbf{u})$, при которой тензор деформации Коши-Грина $\hat{\varepsilon}$ [5] может быть представлен в виде линейной по полю векторов деформации симметричной части этого градиента в форме Эйлера без учета малых квадратичных по градиенту вектора деформации слагаемых $(\nabla \otimes \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{u} \otimes \nabla)$

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon} &= \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla + (\nabla \otimes \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{u} \otimes \nabla)) \cong \\ &\cong \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где тензор $\hat{\varepsilon}$ — симметричный тензор второго ранга. Это позволяет выразить след тензора деформаций через дивергенцию векторного поля деформаций:

$$Sp(\hat{\varepsilon}) = \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (1.4)$$

Левая часть уравнения (1.1) представляет ускорение элемента упругой среды. В эйлеровых координатах ускорение сопровождается движением этой частицы со скоростью $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ [6]

$$\frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (1.5)$$

Конвективный член $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ в этом выражении может быть пренебрежимо мал по сравнению с $\frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2}$ при условии

$$|(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}| \ll \left| \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right|, \quad \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \approx \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1.6)$$

тогда

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u}. \quad (1.7)$$

Поле упругих деформаций можно представить в виде суммы двух векторных полей

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_l, \quad (1.8)$$

одно из которых имеет в каждой точке внутри однородного изотропного объема упругой среды нулевую дивергенцию, $\nabla \cdot \mathbf{u}_t = 0$, второе — нулевой ротор $\nabla \times \mathbf{u}_l = 0$. Векторное тождество для представления дифференциального оператора Лапласа $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ позволяет получить в этом случае

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= \nabla \cdot (\nabla \otimes \mathbf{u}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \\ &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_l) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}_t). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Следовательно, в любой внутренней точке однородной изотропной упругой среды должно выполняться условие

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} - \mu (\Delta \mathbf{u}_t) = - \left(\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_l) \right). \quad (1.10)$$

Чтобы это уравнение выполнялось в окрестности любой внутренней точки идеально упругой, однородной, изотропной среды в любой момент времени в условиях его применимости, независимо от того, как были возбуждены колебания деформаций $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, обе стороны равенства (1.10) должны быть тождественно равны нуль-вектору:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial t^2} - \mu \Delta \mathbf{u}_l = 0, \quad (1.11)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_t) = 0. \quad (1.12)$$

С учетом $\nabla \times \mathbf{u}_l = 0$ последнее уравнение эквивалентно [4]

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \Delta \mathbf{u}_l = 0. \quad (1.13)$$

Уравнения (1.11) и (1.13) описывают компоненты векторного поля деформаций как формально независимые свободные колебания. Поскольку в действительности физические деформации представляют собой их векторную сумму (1.8), то применение уравнений (1.11) и (1.13) ограничено условиями, для которых они получены.

Для колебаний, распространяющихся в виде плоских свободных волн, бегущих в направлении, параллельном единичному вектору \mathbf{n} , $|\mathbf{n}|=1$, общее решение (1.11)

$$\mathbf{u}_l = \mathbf{n}_l \left(f \left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{v_l} \right) + g \left(t + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{v_l} \right) \right), \quad v_l = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (1.14)$$

Единичный вектор $\mathbf{n}_l, |\mathbf{n}_l| = 1$ — вектор поляризации колебаний (1.14), который остается постоянным и для любых ограниченных f, g условие

$$\mathbf{n}_l \cdot \mathbf{n} \left(-\frac{1}{v_l} f' \left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{v_l} \right) + \frac{1}{v_l} g' \left(t + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{v_l} \right) \right) = 0 \quad (1.15)$$

означает, что направление деформаций \mathbf{u}_l , параллельное \mathbf{n}_l , перпендикулярно направлению \mathbf{n} :

$$\mathbf{n}_l \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{т. е. } \mathbf{n}_l \perp \mathbf{n}. \quad (1.16)$$

Аналогично для плоских волн, удовлетворяющих уравнению (1.13),

$$\mathbf{u}_l = \mathbf{n}_l \left(F \left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{v_l} \right) + G \left(t + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{v_l} \right) \right), \quad v_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad (1.17)$$

$$\nabla \times \mathbf{u}_l = \mathbf{n}_l \times \mathbf{n} \left(-\frac{1}{v_l} F' \left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{v_l} \right) + \frac{1}{v_l} G' \left(t + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{v_l} \right) \right) = 0,$$

$$\text{т. е. } \mathbf{n}_l \parallel \mathbf{n}. \quad (1.18)$$

Причем для плоских волн (1.14), (1.17) скорости деформаций

$$\begin{aligned} |\partial_t \mathbf{u}_l| &= \left| \mathbf{n}_l \left(f' \left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{v_l} \right) + g' \left(t + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{v_l} \right) \right) \right| \leq \\ &\leq \left| f' \left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{v_l} \right) \right| + \left| g' \left(t + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{v_l} \right) \right| \leq M \end{aligned} \quad (1.19)$$

при ограниченных производных $f'(\cdot), g'(\cdot)$. Аналогично

$$|\partial_t \mathbf{u}_l| \leq \left| F' \left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{v_l} \right) \right| + \left| G' \left(t + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{v_l} \right) \right| \leq M. \quad (1.20)$$

Правые части (1.17), (1.19) остаются ограниченными для плоских волн в любой момент времени и в любой точке упругой среды, и если для них всегда выполняются условия (1.6), позволяющие пренебречь конвективной нелинейностью в выражении для ускорения частицы среды, то уравнения (1.11) и (1.13), следующие из линейного уравнения сво-

бодных упругих колебаний (1.7), описывают поле упругих деформаций в любой точке упругой среды.

Для сравнения можно рассмотреть сферически-симметричные деформации с центром симметрии \mathbf{x}_0 . В этом случае поле вектора деформаций должно зависеть от $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, причем $\mathbf{u}_l = 0$, поэтому деформации представлены только радиальными векторами, линейные свободные колебания которых подчиняются уравнению (1.12) при выполнении принятых при его выводе условий: упругий материал подчиняется закону Гука для изотропной однородной среды, локальные конвективные члены ускорения элемента среды пренебрежимо малы по сравнению с второй частной производной деформаций по времени. Для них

$$\mathbf{u}_l = \mathbf{n}_r u_r(r, t), \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial t^2} - v_l^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_l) &= \mathbf{n}_r \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} - v_l^2 \left(\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r u_r(r, t)) - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{2}{r^2} u_r(r, t) \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Радиальная проекция лапласиана векторной функции (1.21), $\mathbf{n}_r \cdot (\nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_l))$, представленная в сферических координатах выражением в скобках второго уровня в (1.22), отличается от лапласиана проекции вектора продольной деформации на радиус-вектор из центра сферической симметрии поля деформаций $\Delta u_r(r, t) = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r u_r(r, t))$ слагаемым « $\Delta u_r(r, t) = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r u_r(r, t))$ » [7]. Радиальная векторная составляющая векторного поля упругих деформаций даже в случае сферически-симметричного поля, у которого в сферических координатах с центром в центре симметрии поля отсутствуют другие составляющие, кроме радиальных, не может рассматриваться как скалярное поле, как, например, поле акустического изменения давлений или плотностей флюида.

Частные решения (1.22), зависящие от спектральных параметров $\omega > 0$ и с различными A, B, φ, ψ для каждого ω можно представить в виде расходящихся от центра симметрии и сходящихся к нему бегущих волн

$$\begin{aligned} u_r(r, t; \omega) &= \left(\frac{v_l}{r \omega} \right)^2 \left[A \left(\frac{r \omega}{v_l} \cos \left(\left(\frac{r}{v_l} - t \right) \omega + \varphi \right) - \right. \right. \\ &- \sin \left(\left(\frac{r}{v_l} - t \right) \omega + \varphi \right) \right] + B \left(\frac{r \omega}{v_l} \cos \left(\left(\frac{r}{v_l} + t \right) \omega + \psi \right) - \right. \\ &\left. \left. - \sin \left(\left(\frac{r}{v_l} + t \right) \omega + \psi \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Их можно рассматривать, как волны, возбуждаемые в совокупности нестационарными сферически-симметричными источниками, локализованными вокруг центра симметрии поля деформаций, уходящие от центра симметрии, и

волны, возбужденные сферически-симметричными источниками, находящимися «бесконечно далеко» от области наблюдения поля, бегущими к центру симметрии (1.23). Конечно, в конкретных условиях каждая из спектральных составляющих может иметь нулевые множители (A, B), например, все $B = 0$, и поле (1.21) состоит только из «расходящихся» бегущих сферических волн продольной деформации упругой среды.

Любая линейная комбинация деформаций, соответствующих (1.21), (1.23), представляет сферически-симметричное поле, распространяющееся в виде суперпозиции бегущих волн. Ее спектральная составляющая удовлетворяет уравнению (1.22) в той области однородной изотропной упругой среды, в которой это уравнение применимо для описания ее упругих деформаций. Эта область ограничена условием (1.6), из которого следует, что она лежит на достаточном удалении от центра сферической симметрии поля деформаций вследствие быстрого возрастания функции (1.23) и ее производных при $r\omega \rightarrow 0$. Например, для расходящихся от центра симметрии спектральных составляющих поля продольных деформаций

$$\frac{|\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}|}{\left| \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right|} = \left| \frac{\partial_t u_r(r, t; \omega) \partial_r (\partial_t u_r(r, t; \omega))}{\partial_{tt}^2 u_r(r, t; \omega)} \right| \propto \frac{A v_l^2}{r^3 \omega^2}. \quad (1.24)$$

То есть по мере приближения к центру сферической симметрии поля деформаций, т. е. при $r \rightarrow 0$, его величина для фиксированных ω возрастает, и условие (1.6) применимости линейных уравнений для них где-то перестает выполняться даже для идеально упругих материалов. Поэтому фундаментальное решение уравнения (1.7) имеет математический смысл в пространстве обобщенных функций, но не соответствует реальному физическому «точечному источнику» поля упругих деформаций. Для плоских волн (1.14), (1.17) эти ограничения соблюдаются во всем объеме линейно-упругой сплошной среды, если они выполняются в окрестности какой-либо его точки.

Вдали от центра сферической симметрии спектральная составляющая поля (1.23) приближенно при $r\omega/v_l = (r_0 + \delta r)\omega/v_l \gg 1$ и $\frac{\delta r}{r_0} \ll 1$, т. е. в окрестностях точек сферы $r \cong r_0$, принимает вид почти плоской волны с почти постоянными значениями C, φ , зависящими от r_0, v_l, ω . Локально это означает пренебрежение эффектами расхождения, который глобально на всем пути распространения сигнала, конечно определяется на основе (1.23). Например, для спектральной составляющей волны, бегущей в сторону возрастания r :

$$u_r(r, t; \omega) \approx C \cos \left(\left(t - \frac{r_0 + \delta r}{v_l} \right) \omega + \varphi \right), \quad C = A \frac{v_l}{r_0 \omega} \quad (1.25)$$

Выводы (1.24), (1.25) обобщаются на суперпозицию гармонических спектральных составляющих

поля деформаций при условии существования нижней границы спектра составляющих ω_{min} , т. е. $\omega \gg \omega_{min}$. При этом спектральные составляющие поля деформаций локально правомерно рассматривать в виде плоских продольных волн. Спектральный параметр ω возникает при разделении переменных в уравнении (1.22) и имеет смысл величины, обратной характерному времени T_c изменения величины $u_r(r, t)$, например, вблизи фронта сигнала в окрестностях поверхности, отделяющей невозмущенную область среды от области, вовлеченной в причинно-обусловленные заданным источником деформации. Поэтому условие $r_0 \omega_{min}/v_l \gg 1$ соответствует удалению от центра сферической симметрии поля деформаций, на котором его можно рассматривать приближенно как уже почти «плоскую» волну, и связано с пространственной протяженностью, определяемой его длительностью и скоростью распространения v_l :

$$r_0 \gg v_l T_{cmax}. \quad (1.26)$$

Динамические характеристики продольных упругих волн, рассеянных на границе однородных упругих сред в виде поперечных составляющих отраженного волнового поля, определяются коэффициентом конверсии и его угловой зависимостью, т. е. индикатрисой рассеяния.

Далее рассмотрим **плоские границы деформируемых сплошных сред**. Если упругая однородная среда не безгранична, то в однородных локально изотропных областях необходимо использовать уравнение деформаций, эквивалентное (1.7). В простейшем случае неоднородности в виде контакта без проскальзывания двух однородных изотропных полупространств вдоль плоской «бесконечно тонкой» границы связь упругих деформаций на плоской границе Γ с общей единичной нормалью \mathbf{n}_Γ в любой ее точке состоит из:

1. Кинематических условий — непрерывности деформаций, следовательно, скоростей деформаций на границе без проскальзывания

$$\partial_t \mathbf{u}_1|_{x \in \Gamma} = \partial_t \mathbf{u}_2|_{x \in \Gamma}, \quad (1.27)$$

2. Динамических условий — непрерывности напряжений

$$\hat{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n}_\Gamma|_{x \in \Gamma} = \hat{\sigma}_2 \cdot \mathbf{n}_\Gamma|_{x \in \Gamma}. \quad (1.28)$$

Нестационарные упругие колебания, распространяющиеся в виде бегущих плоских волн (1.14), (1.21) в каждой из граничащих сред, на границе должны удовлетворять условиям (1.27), (1.28) соотношениям [8, 9]. Для случая падения продольной плоской бегущей волны \mathbf{u}_{11}^+ , распространяющейся в упругой среде «1» в направлении \mathbf{n}_{11}^+ в сторону плоской границы Γ с упругой средой «2», отраженная поперечная волна \mathbf{u}_{11}^- — имеет SV-поляризацию \mathbf{n}_{11}^- в плоскости $\{\mathbf{n}_{11}^+, \mathbf{n}_\Gamma\}$ при $\mathbf{n}_{11}^+ \parallel \mathbf{n}_\Gamma$, направлена по вектору \mathbf{n}_{11}^- и пропорциональна на границе Γ с коэффициентом конверсии R_{11}^- падающей плоской продольной волне

$$\mathbf{u}_{ll}^+ = \mathbf{n}_{ll}^+ f\left(t - \frac{\mathbf{n}_{ll}^+ \cdot \mathbf{x}}{v_{l1}}\right), \quad \mathbf{u}_{ll}^- = \mathbf{n}_{ll}^- R_{ll}^- f\left(t - \frac{\mathbf{n}_{ll}^- \cdot \mathbf{x}}{v_{l1}}\right). \quad (1.29)$$

Коэффициент конверсии R_{ll}^- определяется из граничных условий (1.27), (1.28) вместе с безразмерными коэффициентами отражения для продольной волны R_{ll}^- , прохождения для продольной и поперечной волн, уходящих от границы в среду «2», и может быть представлен в виде функции от безразмерных параметров, которые можно выбрать, например, следующим образом при $0 < \mathbf{n}_{ll}^+ \cdot \mathbf{n}_\Gamma \leq 1$:

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \frac{v_{t1}}{v_{l1}}; \gamma_2 = \frac{v_{t2}}{v_{l2}}; N = \frac{v_{l2}}{v_{l1}}; Z = \frac{\rho_2 v_{l2}}{\rho_1 v_{l1}}; \\ \varphi = \arccos(\mathbf{n}_{ll}^+ \cdot \mathbf{n}_\Gamma) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Первые три — отношения указанных фазовых скоростей, причем γ_1 и γ_2 являются внутренними характеристиками упругих свойств каждой среды. Параметры N, Z характеризуют относительные свойства граничащих упругих сред: N является показателем преломления плоских продольных волн при переходе из среды «1» в среду «2», параметр Z — отношение импедансов плоских продольных волн в граничащих упругих средах, φ — угол падения продольной волны \mathbf{u}_{ll}^+ на плоскость Γ . То есть (полное выражение приведено в приложении 2) коэффициент конверсии продольной падающей волны в «отраженную» поперечную — функция пяти безразмерных параметров:

$$R_{ll}^- = R_{ll}^-(\gamma_1, \gamma_2, N, Z, \varphi). \quad (1.31)$$

Причем всегда при $\varphi = 0$ коэффициент конверсии $R_{ll}^-(\gamma_1, \gamma_2, N, Z, 0) = 0$.

Параметры, характеризующие остальные составляющие рассеянного на плоской границе упругих полупространств для идеально упругих сред, также известны и следуют из результатов [8, 9].

2. Кинематика сейсмических обменных PS-волн

В сейсмических задачах принято отождествлять первичные (primary — P) и вторичные (secondary — S) сейсмические сигналы регистрируемые от одного источника с пакетами продольных и поперечных волн, распространяющихся в однородных изотропных упругих средах в соответствии с (1.11), (1.12). В этом случае, если геологическая среда достаточно однородна и изотропна с точки зрения ее сейсмических свойств, для соответствующих скоростей распространения принимаются выражения, справедливые в однородных изотропных идеально упругих средах (1.14), (1.17):

$$V_s = v_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad V_p = v_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}. \quad (2.1)$$

Это соответствие справедливо в той мере, в которой условия распространения сейсмических сигналов в геологических средах соответствуют линейной модели распространения малых упругих

колебаний в виде бегущих волн в идеально упругих однородных изотропных средах.

Отношение V_s/V_p значительно различается для разных типов горных пород. В работе [10] приведены результаты определения упругих параметров 678 пород земной коры при гидростатических давлениях ~1 ГПа. При этом автор статьи использовал опубликованные разными авторами по возможности наиболее точные измерения V_s/V_p для косвенного определения коэффициента Пуассона

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad \text{из соотношения:} \quad V_s / V_p = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}}. \quad (2.2)$$

Для наших дальнейших оценок достаточно отметить, что приведенные результаты для V_s/V_p различных горных пород лежат внутри интервала [0,459, 0,668] как показано в результатах лабораторных измерений для различных горных пород в [11]. Можно округленно принять, что это отношение для рассмотренных горных пород лежит в интервале [0,46, 0,67].

Для грунтов данные по величине коэффициента Пуассона приведены в табл. 1 [12]:

Таблица 1

Table 1

Грунты	Коэффициент поперечной деформации ν (коэффициент Пуассона)
Крупнообломочные	0,561
Пески и супеси	0,535–0,480
Суглинки	0,480–0,454
Глины при показателе текучести $I_L = \frac{W - W_p}{W_L - W_p}$, где W — естественная влажность грунта; W_p — влажность, при которой грунт твердеет или теряет связность; W_L — влажность, при которой грунт начинает «течь»: 0 $0 < I_L \leq 0,25$ $0,25 < I_L \leq 1$	0,612–0,535 0,535–0,440 0,440–0,302
Примечание: меньшие значения применяют при большей плотности грунта.	

Они получены в условиях вблизи дневной поверхности, но могут, видимо, рассматриваться как оценочные значения для верхней части сейсмических разрезов.

Используя связь коэффициентов Пуассона с отношением V_s/V_p (2.2), для изотропного упругого тела можно найти на основании данных табл. 1 величины, приведенные в табл. 2.

Таблица 2

Table 2

Грунты	V_s/V_p
Крупнообломочные	0,561
Пески и супеси	0,535–0,480
Суглинки	0,480–0,454
Глины при показателе текучести I_L :	
0	0,612–0,535
$0 < I_L \leq 0,25$	0,535–0,440
$0,25 < I_L \leq 1$	0,440–0,302

То есть значения V_s/V_p по этим данным лежат в диапазоне [0,3, 0,612].

Из приведенных данных можно заключить, что при достаточно общих предположениях в реальных условиях горные породы, обладающие упругими свойствами изотропных упругих материалов, характеризуются при распространении в них упругих волн деформаций и напряжений отношением (фазовых) скоростей поперечных (сдвиговых) и продольных (компрессионных) плоских волн, заведомо лежащих в интервале [0,2, 0,7]. Часто используемое в качестве «среднего» значения этой величины для горных пород число $1/\sqrt{3} \cong \cong 1/1,732 = 0,577$ лежит, очевидно, внутри этого интервала, но сам экспериментально наблюдаемый интервал включает в себя значения, существенно отличающиеся от него. Сама величина $1/\sqrt{3}$ возникает как результат применения «гипотезы Пуассона», предполагающей, что в упругом материале упругие параметры Ламе имеют равные величины, т. е. тогда

$$\lambda = \mu, \quad (2.3)$$

$$\frac{V_s}{V_p} = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} = 1/\sqrt{3} \cong 0,577. \quad (2.4)$$

Очевидно, что для реальных горных пород и грунтов гипотеза Пуассона далеко не всегда выполняется.

Из сказанного выше следует, в частности, что параметры γ_1 и γ_2 (1.32) должны определяться как

$$\gamma_1 = \frac{V_{s1}}{V_{p1}}, \quad \gamma_2 = \frac{V_{s2}}{V_{p2}}. \quad (2.5)$$

Причем второй параметр входит в число параметров, влияющих на динамику рассеяния упругих волн (1.31), но не оказывают влияние на кинематику распространения сигналов в среде «1».

В случае, когда источник сейсмических сигналов образует механически замкнутую систему

с упругой средой, полный механический импульс и момент импульса в такой системе не могут изменяться при возбуждении сейсмических волн таким источником. Рассмотренный выше случай сферически-симметричного поля продольных волн деформаций, возбужденных некоторым источником или источниками, полностью удовлетворяет этим условиям, поскольку полный механический импульс и момент импульса такого поля деформаций всегда равны нулю, а энергия может быть обеспечена химическими, электромагнитными и прочими немеханическими источниками. На достаточно большом расстоянии сигнал с ограниченным спектром практически мало отличается от плоской продольной волны, поэтому его взаимодействие с плоской границей может быть рассмотрено с этой точки зрения. Для возбуждения поперечных составляющих поля деформаций в покоящейся сплошной среде необходимы внешние источники механического импульса и/или момента импульса [13]. Поэтому их рассмотрение в качестве первой монотипной волны, переносящей сигнал от источника к границе раздела упругих сред, менее интересно.

Таким образом, наибольший методический интерес при рассмотрении распространения сигналов в виде комбинации монотипных волн: P и S с конверсией на плоской границе двух упругих сред представляет задача, в которой до границы сигнал переносится в виде P -волн, а от нее к пункту регистрации — в виде S -волн. Оценка первой из них производится в процессе стандартной обработки сейсмограмм продольных волн МОВ-ОСТ. Для получения скоростных характеристик обменных волн, как правило, осуществляется формирование специальной выборки трасс, основанной на знании отношения $\gamma = V_s/V_p$ (или переборе его значений). При этом достигается взаимная идентификация продольной и обменной волн, отраженных от одной и той же границы [14]. Решение задачи идентификации волн существенно упрощается на глубинных разрезах, получаемых независимо по продольным и обменным волнам. Однако для этого необходима оценка $V_{\text{ост}}$ для обменных волн ($V_{\text{ост-ps}}$). В работе [2] рассматривается возможность построения подобной оценки на основе гиперболического приближения годографа обменной волны. Эффективность ее использования при обработке реальных материалов МВС показана в работе [15], в которой на ее основе определяются значения интервальных скоростей обменных волн, как $V_{\text{ост-ps}}$, так и интервальных — $V_{\text{инт-ps}}$, строится предварительный глубинный разрез по PS -волнам, а затем пересчет $V_{\text{инт-ps}}$ в интервальные скорости S -волн $V_{\text{инт-s}}$ с учетом аналогичных значений по продольным волнам. Полученные оценки $V_{\text{инт-s}}$ уточняются в процессе глубинной миграции сигналов обменных волн.

Ниже рассматривается решение задачи определения $V_{ост-PS}$ и $V_{ост-S}$ на основе построения лучшего по точности приближения гиперболического годографа обменной волны при условии, что взаимная конверсия монотипных волн возможна только на границах однородных областей. Границы однородного упругого слоя принимаются горизонтальными или близкими к ним. На рис. 1 в точках S и G на дневной поверхности расположены источник и приемник сигналов, а R' и R — точки конверсии падающих волн в отраженные другого типа, для которых время распространения сигналов от S к G формально совпадает. В силу приведенных выше соображений далее рассмотрим путь SRG , на котором от источника до границы упругих сред сигнал распространяется в виде продольной волны. Если рассматривать источник сигнала и окружающую его среду как механически замкнутую динамическую, что справедливо при условии, что действие стационарных внешних сил на среду полностью уравновешено статическими деформациями среды, а импульсный источник выделяет энергию, часть которой расходуется на механические деформации окружающей среды, порождающие в линейно-упругой зоне сейсмические волны, то полный механический импульс и момент импульса всей системы не может измениться. Поэтому такой источник не может породить сдвиговые (поперечные) волны. Это позволяет в дальнейшем рассматривать только сигналы, первоначально представленные в виде продольных волн, частичная конверсия которых в поперечные волны может происходить только при взаимодействии с акустически контрастной границей с другой упругой средой. Для обменного сигнала PS это соответствует самому быстрому пути распространения сигнала по линии SRG на рис. 1. Дальнейшее исследование кинематики сигналов только в «верхней» на рисунках упругой среде позволяет не указывать у соответствующих параметров индекса среды, т. е.

$$\gamma = \frac{V_s}{V_p}, \sin \alpha_t = \gamma \sin \varphi. \quad (2.6)$$

Расстояние от пункта излучения до пункта приема

$$L = SG = H \operatorname{tg} \varphi + H \operatorname{tg} \alpha_t = H \sin \varphi \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} + \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \varphi}} \right). \quad (2.7)$$

Время распространения сигнала по выбранному пути SRG

$$t = \frac{H}{V_p \cos \varphi} + \frac{H}{V_s \cos \alpha_t} = \frac{H}{V_p} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} + \frac{1}{\gamma \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \varphi}} \right). \quad (2.8)$$

Уравнения (2.7) и (2.8) образуют вместе систему уравнений, параметрически задающих зависи-

мость $t(L)$, т. е. лучевой PS -годограф для поставленной задачи [16, 17].

Общим параметром служит угол падения φ продольной волны на плоскую границу, который входит только в виде аргумента синуса от этого угла. Практически для угла падения выполняются ограничения $0 < \varphi \leq \varphi_m < \pi/2$. Соответственно, $0 < \sin \varphi \leq \sin \varphi_m < 1$. Максимальный угол падения $\varphi_m \leq \begin{cases} \frac{\pi}{2}, \text{ при } v_{11} \geq v_{12} \\ \varphi_{cr}, v_{11} < v_{12} \end{cases}$. Критический угол падения определяется при $v_{11} < v_{12}$ как $\varphi_{cr} = \arcsin \frac{v_{11}}{v_{12}}$. (приложение 2).

Уравнения (2.7), (2.8) можно перевести в универсальную безразмерную форму для безразмерных переменных, введенных следующими отношениями:

$$\zeta = \frac{L}{H}, \tau = \frac{tV_p}{H}, p = \frac{1}{\sin \varphi}, 1 < \frac{1}{\sin \varphi_m} \leq p < \infty; \quad (2.9)$$

$$\tau = p \left(\frac{1}{\sqrt{p^2 - 1}} + \frac{1}{\gamma \sqrt{p^2 - \gamma^2}} \right); \quad (2.10)$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{p^2 - 1}} + \frac{\gamma}{\sqrt{p^2 - \gamma^2}}. \quad (2.11)$$

Рис. 1. Геометрическая постановка задачи

Fig. 1. Geometric formulation of the problem

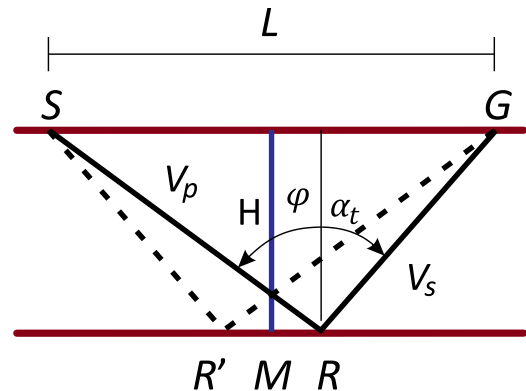
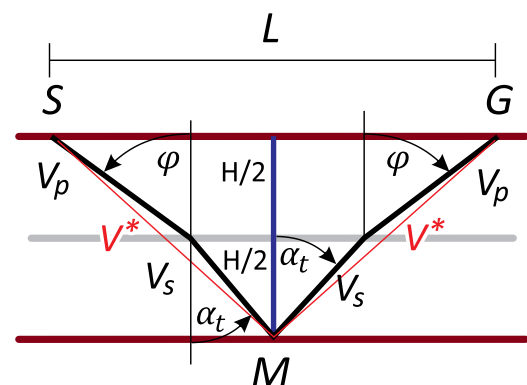


Рис. 2. Двухслойная эквихронная модель

Fig. 2. Double layer equichronous model



Все величины в (2.10), (2.11) могут иметь действительные и строго положительные значения. Универсальный безразмерный годограф, т. е. зависимость $\tau(\zeta)$ для поставленной задачи, требует решения (2.11) относительно p как функции (ζ, γ) и ее подстановки в (2.10), исключая этот параметр из системы уравнений. Обычно авторы ограничиваются построением приближенных выражений [3] вместо явного полного решения этой алгебраической задачи. По теореме Абеля-Руффини [18] общее алгебраическое уравнение степени $n \geq 5$ неразрешимо в радикалах. Уравнения 4-й степени такие решения имеют. В приложении 3 показаны результаты решения (2.11), которое построено с помощью сведения задачи к вспомогательному алгебраическому уравнению 4-й степени для величины (τ^2) и последующему отбору единственного действительного решения, удовлетворяющего наложенным на параметры ограничениям, позволяющим отбросить посторонние корни:

$$L = 2H \operatorname{tg} \varphi^*, \quad t = \frac{2H}{V^* \cos \varphi^*}. \quad (2.12)$$

В используемых безразмерных переменных соответствующий гиперболический годограф имеет вид

$$\tau_h = 2 \frac{V_p}{V^*} \sqrt{1 + \left(\frac{\zeta}{2}\right)^2} = \frac{2}{\gamma^*} \sqrt{1 + \left(\frac{\zeta}{2}\right)^2}, \quad \gamma^* = \frac{V^*}{V_p}. \quad (2.13)$$

Приравнявая $\tau = \tau_h$, получим уравнение для связи γ^* с (ζ, γ) и определения γ через (ζ, γ^*) :

$$\frac{2}{\gamma^*} \sqrt{1 + \left(\frac{\zeta}{2}\right)^2} = \tau(\zeta, \gamma). \quad (2.14)$$

Используя алгебраически точное решение задачи (2.10), (2.11), полученное как описано в приложении 3 для выражения безразмерного годографа $\tau(\zeta, \gamma)$, из (2.14) можно получить зависимость величины $\gamma = \gamma(\zeta, \gamma^*)$, т. е. связать ее с непосредственно измеряемыми величинами ζ, γ^* . На рис. 3 результаты вычислений показаны в виде графиков, каждая из кривых соответствует различным значениям $\zeta \in [0,01, 4,01]$, монотонно возрастающим от верхней на графиках линии к нижней.

Отличие гиперболических годографов (2.14) от годографов, полученных с помощью точных решений (2.10), (2.11) (приложение 3) показано для некоторых значений γ на рис. 11.

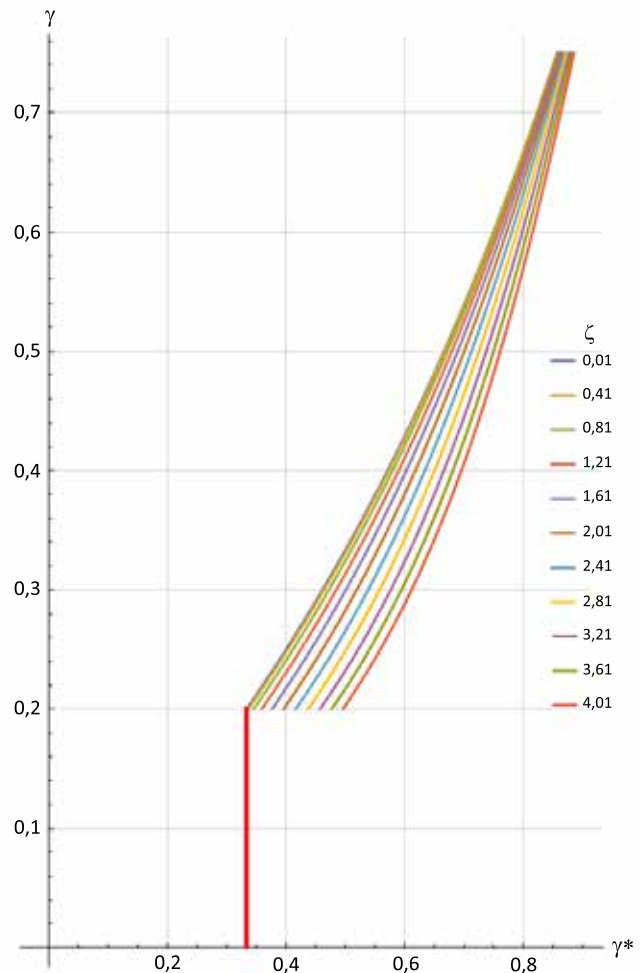
Как уже было указано, при $\zeta \rightarrow +0$ волновая взаимная конверсия продольных и поперечных волн исчезает, но в геометрическом рассмотрении существует формальный предел

$$\lim_{\zeta \rightarrow +0} \gamma(\zeta, \gamma^*) = \frac{\gamma^*}{2 - \gamma^*}. \quad (2.15)$$

Он физически не соответствует никаким обменным годографам, но дает возможность оценить

Рис. 3. Графики зависимости точного значения γ для однородной изотропной упругой среды от величины γ^* для $0,01 < \zeta < 4,01$, определенной с помощью метода интервальных скоростей для двухслойной модели shown in the fig. 2. Красная вертикаль отмечает значение $\gamma^* = 1/3 \cong 0,33(3)$

Fig. 3. Plots of the exact value of γ vs the value of γ^ for $0,01 < \zeta < 4,01$ for a homogeneous isotropic elastic medium, determined using the interval velocity method for a two-layer model shown in the fig. 2. The red vertical line marks the value $\gamma^* = 1/3 \cong 0,33(3)$*



правильность положения нижней левой точки графиков $\gamma = \gamma(\zeta, \gamma^*)$. Значению $\gamma = 0,2$ по формуле (2.15) соответствует $\gamma^* = 1/3 \cong 0,33(3)$. Расчет для достаточно малой величины $\zeta = 0,01$, ввиду того, что при $\zeta = 0$ точная формула для годографа содержит сингулярные элементы и вычисление по ней $\tau(\zeta, \gamma)$ не имеет смысла, но формальный предел (2.10), соответствующий $\sin \varphi \rightarrow 0, \lim_{p \rightarrow \infty} \tau = \tau_{0ps} = 1 + 1/\gamma$, хорошо согласуется с этим предельным результатом, как видно на рис. 3. В размерном виде из (2.15) эквивалентно $V^* = 2V_s V_p / (V_s + V_p)$. С помощью зависимости, графики которой представлены на рис. 3, можно на основе измеренных значений величин $L, H, V_p, V^* = V_{ps}$ определить

$$V_s = \gamma(\zeta, \gamma^*) V_p \quad (2.16)$$

и тем самым решить поставленную задачу.

Еще один вопрос, который можно разрешить на основе полученных результатов, — это вычисление смещения точки конверсии (точка R на рис.1) от срединной точки (точка M). В безразмерных величинах это

$$m = \frac{MR}{H}. \quad (2.17)$$

Результаты вычислений для различных значений γ представлены на рис. 4.

Определение $\gamma = V_s/V_p$ по измерениям на фиксированных удалениях «источник–приемник»

Знание зависимости $\tau = \tau(\zeta, \gamma)$ дает возможность по выделенным на сейсмограммах моментам прихода сигналов к сейсмоприемникам на известном удалении от источника сигнала определить γ по измеренным интервалам τ . Благодаря гладкой непрерывной зависимости сечения точно построенной поверхности $\tau(\zeta, \gamma)$ для фиксированных значений ζ легко аппроксимируются с достаточно высокой точностью.

На рис. 5 представлен их вид для $\zeta = L/H = 0,5; 0,7; 1; 1,5; 2$. Это позволяет определить γ по результатам регистрации конверсионного сигнала, выделенного для удаления пункта регистрации, при котором конверсионный сигнал достаточно интенсивен и может быть зарегистрирован при хорошем отношении сигнал/помеха.

Обсуждение результатов

1. Отвлекаясь от проблем определения и коррекции статических поправок, предложенные решения по описанию годографов обменных отраженных волн для условий залегания границ, близких к горизонтали, обеспечивают оценку параметра γ при наличии определенных для нее по результатам

Рис. 5. Зависимость $\gamma = V_s/V_p$ от величины безразмерного времени распространения сигналов $\tau = tV_p/H$ для удалений пункта регистрации от источника сигнала с фиксированными значениями $\zeta = L/H = 0,5; 0,7; 1; 1,5; 2$

Fig. 5. Dependence of $\gamma = V_s/V_p$ vs the dimensionless traveltime of signal propagation $\tau = tV_p/H$ at offsets of the registration point from the signal source at fixed dimensionless values $\zeta = L/H = 0,5; 0,7; 1; 1,5; 2$

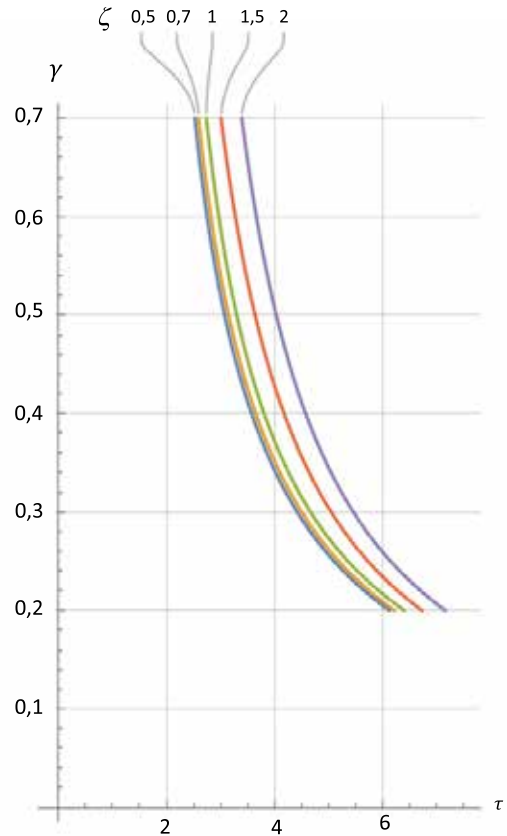
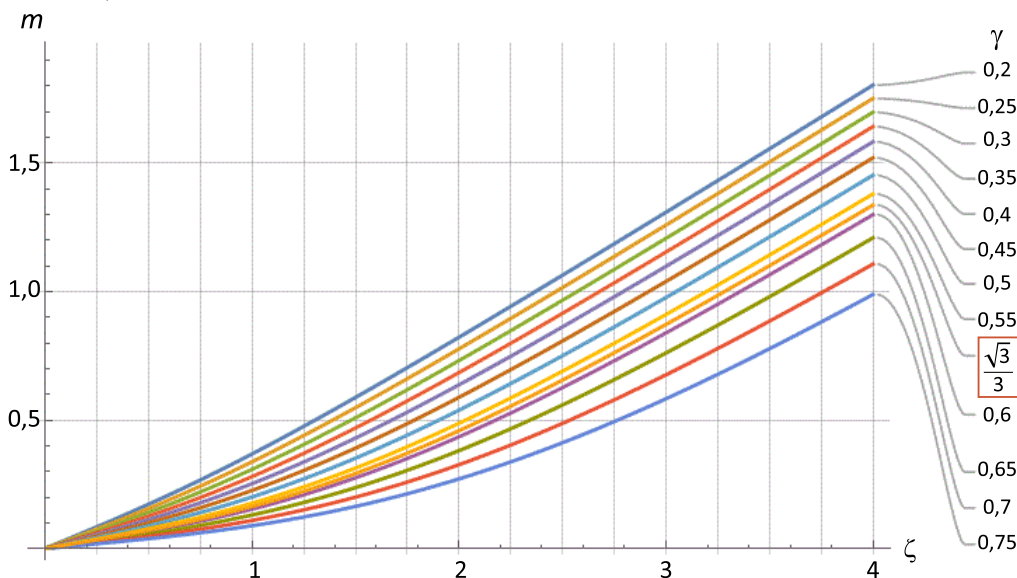


Рис. 4. Сдвиг точки конверсии (R на рис. 1) от средней точки (M на рис. 1, 2) в безразмерных значениях $m = RM/H$ от $\zeta = L/H$ при различных значениях $\gamma = V_s/V_p$

Fig. 4. The shift of the conversion point (R in fig. 1) from the midpoint (M in fig. 1, 2) as dimensionless values $m = RM/H$ vs $\zeta = L/H$ for different values $\gamma = V_s/V_p$



обработки и интерпретации наблюдений по продольным волнам глубины отражающей границы и значения скорости, рассматриваемой как скорость продольных волн.

2. По особенностям изменения коэффициентов отражения в зависимости от угла падения продольной волны или удалений может быть выбран диапазон последних, обеспечивающий получение наилучшего отношения сигнал/помеха для искомой обменной волны.

3. Только для удалений, меньших 1-1,5 глубины границы и $\gamma \geq 0,5$, годограф обменной волны может быть с приемлемой точностью аппроксимирован гиперболой, по скоростной характеристике которой может быть получена оценка минимального значения скорости поперечной волны. С ее учетом, в свою очередь, сокращается диапазон переборов параметра γ , а при переходе к слоистой среде — она позволяет получить приближение интервальной скорости поперечной волны, как это сделано в [15].

4. При использовании стандартных средств обработки в процессе получения спектров скоростей и последующего построения временных разрезов обменных волн для повышения отношения сигнал/помеха возможна совместная обработка сейсмограмм в окрестности общей срединной точки (ОСТ) на базе $\pm 0,2$ глубины границы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Используемые тензорные обозначения [19]:

- a, u, ρ, \dots — скалярные величины или функции;
- $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{f}, \dots$ — векторные величины (тензоры 1-го ранга) или векторные функции в 3-мерном (физическом) евклидовом пространстве;
- $\hat{A}, \hat{\sigma}, \hat{\xi}$ — тензорные величины ранга 2 и выше или соответствующие тензорные функции в физическом 3-мерном пространстве;
- \mathbf{x}, \mathbf{r} — радиус-векторы точки в 3-мерной эйлеровой системе координат в физическом пространстве: \mathbf{x} — для референтной конфигурации, \mathbf{r} — для актуальной конфигурации частиц сплошной среды,
- t — время;
- $\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ — дифференциальный оператор Гамильтона в эйлеровых координатах;
- " \cdot " — операция скалярного умножения в 3-мерном евклидовом векторном пространстве;
- " \times " — операция векторного умножения в 3-мерном евклидовом векторном пространстве;
- " \otimes " — тензорное умножение (тензорное умножение на скалярную величину — это просто арифметическое умножение, поэтому знак тензорного умножения в этом случае может быть опущен);
- $\nabla \otimes \equiv grad$ — дифференциальный оператор градиента функции в эйлеровых координатах (в частности, для любой скалярной функции $f(\mathbf{x}) : \nabla \otimes f \equiv \nabla f$);

$\nabla \cdot \equiv div$ — дифференциальный оператор дивергенции функции в эйлеровых координатах;

$\nabla \times \equiv rot$ — дифференциальный оператор ротора функции в эйлеровых координатах;

$\frac{\partial}{\partial t}$ — производная по времени от функций координат и времени в фиксированной точке эйлеровой системы координат;

$\frac{d}{dt} \equiv D_s$ — субстанциональная производная по времени от функции, характеризующей значение физического параметра частицы сплошной среды, движущейся относительно эйлеровой системы координат;

\hat{g} — метрический тензор 2-го ранга:

$$\hat{g} = \hat{g}^T, \det \hat{g} = 1,$$

для любого тензора \hat{T}

$$\hat{T} \cdot \hat{g} = \hat{g} \cdot \hat{T} = \hat{T} \quad \hat{T} \cdot \hat{T}^{-1} = \hat{T}^{-1} \cdot \hat{T} = \hat{g},$$

след тензора 2-го ранга (от немецкого die Spur или английского the trace)

$$Sp \hat{T} = tr \hat{T} = \hat{T} \cdot \hat{g} = \hat{g} \cdot \hat{T}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

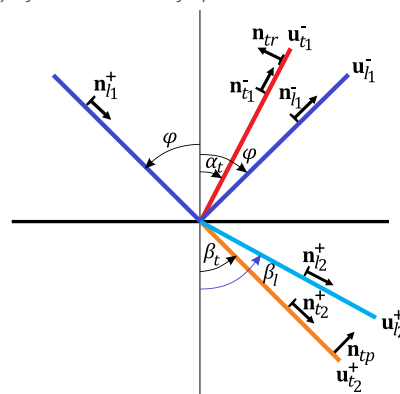
Коэффициент конверсии R_{it}^- плоской продольной волны, падающей из упругой среды «1» на плоскую границу без проскальзывания с упругой средой «2», в отраженную в среду «1» плоскую поперечную волну определяется на основе отношений Нота-Цепритца [20]. Углы направлений распространения отраженных и прошедших плоских поперечных и продольных волн $\alpha_i, \beta_p, \beta_t \in [0, \pi/2]$ и связаны с углом падения φ волны \mathbf{u}_{it}^+ отношениями

$$\sin \varphi = \frac{1}{\gamma_1} \sin \alpha_i = \frac{1}{N} \sin \beta_i = \frac{1}{N \gamma_2} \sin \beta_t. \quad (П2.1)$$

С помощью (П2.1) можно записать коэффициент конверсии R_{it}^- в виде см. П2.2, П2.3

Рис. 6 Диаграмма направлений распространения и поляризаций плоских волн при рассеянии продольной падающей волны на плоской границе двух упругих полупространств

Fig. 6 Diagram of propagation directions and polarizations of plane waves at scattering of a longitudinal incident wave on a plane boundary of two elastic half-spaces



$$R_{it}^- = \frac{\sin 2\varphi}{D} (\gamma_2 ((Z \cos(2 \arcsin(N\gamma_2 \sin \varphi)) - N \cos(2 \arcsin(\gamma_1 \sin \varphi))) (Z \cos(2 \arcsin(N\gamma_2 \sin \varphi)) + 2N\gamma_1^2 \sin^2 \varphi) + 2(NZ\gamma_2^2 - \gamma_1^2) (\cos(2 \arcsin(\gamma_1 \sin \varphi)) + 2NZ\gamma_2^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{(1 - N^2 \sin^2 \varphi)(1 - N^2\gamma_2^2 \sin^2 \varphi)}); \quad (П2.2)$$

$$D = \gamma_1 \cos(\arcsin(N \sin \varphi) - \arcsin(N\gamma_2 \sin \varphi)) (\cos^2(2 \arcsin(\gamma_1 \sin \varphi)) + \sin(2\gamma_1^2 \varphi) \sin(2 \arcsin(\gamma_1 \sin \varphi))) + Z(\gamma_2 \sqrt{(1 - N^2 \sin^2 \varphi)(1 - \gamma_1^2 \sin^2 \varphi)} + \gamma_1 \cos \varphi \sqrt{1 - N^2\gamma_2^2 \sin^2 \varphi} - 2\gamma_1\gamma_2 \sin(\varphi - 2 \arcsin(\gamma_1 \sin \varphi)) \sin(\arcsin(N \sin \varphi) - 2 \arcsin(N\gamma_2 \sin \varphi)) + Z^2\gamma_1 \cos(\varphi - \arcsin \gamma_1 \sin \varphi) (\cos^2(2 \arcsin(N\gamma_2 \sin \varphi)) + \gamma_2^2 \sin(2 \arcsin(N \sin \varphi)) \sin(2 \arcsin(N\gamma_2 \sin \varphi))). \quad (П2.3)$$

Примечание. При $N > 1$ существует критический угол падения φ_{cr} , для которого возможно достижение $\beta_l = \beta_{lcr} = \pi/2$, $\sin \beta_{lcr} = 1$, т. е. $\varphi_{cr} = \arcsin \frac{1}{N} = \arcsin \frac{v_{l1}}{v_{l2}}$. Это значит, что математическая модель падения на бесконечную плоскую границу упругих сред сигнала в виде продольной волны с бесконечным плоским фронтом имеет физический смысл углах падения $\varphi \in [0, \varphi_{cr}]$. Формально бóльшие, чем φ_{cr} , углы падения должны порождать в среде «2» сигнал, опережающий движение линии пересечения фронтом падающей волны границы упругих сред, и порождать в среде «1» неоднородную «головную волну», опережающую линию пересечения плоским фронтом падающего сигнала первой плоской границы пачки. При бесконечной границе и бесконечном плоском фронте сигнала начало этого процесса уходит в «бесконечное прошлое». Что приводит формально к тому, что в любой конечный момент времени «головная волна» в среде «1» бесконечно опередила бы линию пересечения фронтом сигнала этой границы, — т. е. к нарушению принципа причинности. Таким образом, углы падения, превышающие критический, не имеет смысла рассматривать в рамках данной математической нестационарной модели. Это отличает ее от рассмотрения стационарного отражения/преломления бесконечной монохроматической плоской волны на плоской границе, для которой при $v_2 > v_1$ получают экспоненциально затухающее гармоническое стационарное волновое поле по нормали к границе вглубь высокоскоростной среды и суперпозицию отраженных и неоднородных «головных» волн в низкоскоростной среде. Таким образом, математическая модель сигнала в виде продольной волны с плоским фронтом, падающего на плоскую границу двух упругих сред, применима при достаточном удалении от импульсного источника (см. 1.26) и с учетом ограничения на углы падения $\varphi \in [0, \pi/2]$ при $N < 1$ или $\varphi \in [0, \varphi_{cr}]$ при $N > 1$.

ПРИМЕР для $N > 1$.

Пусть $V_{p1} = 2\,400$ м/с, $V_{p2} = 4\,300$ м/с, $V_{s2} = 2\,580$ м/с, $\rho_1 = 2\,200$ кг/м³, $\rho_2 = 2\,500$ кг/м³.

Этим параметрам соответствуют значения $N = \frac{V_{p2}}{V_{p1}} \cong 1,792 > 1$, $\gamma_2 = 0,6$, $Z \cong 1,577$, фиксируя которые, можно рассмотреть коэффициент конверсии $R_{it}^- = R_{it}^-(\gamma_1, \gamma_2, N, Z, \varphi)$ как функцию от γ_1, φ , контурный график поверхности которой представлен на рис. 7.

Из рис. 7 видно, что коэффициенты конверсии для принятых параметров имеют для любых значений $\gamma = \gamma_1 = V_{s1}/V_{p1}$ интервала $[0, 2, 0, 7]$ наибольшие значения при углах падения $\varphi \approx 23^\circ - 27^\circ$, — т. е. в достаточно узком интервале углов. Можно выбрать фиксированный угол, например $\varphi = 25^\circ.5$ лежащий в этом интервале, и рассчитать зависимость (безразмерного) времени прихода PS-сигнала для этого угла падения от величины γ . Она показана на рис. 8.

Наконец, на основании функциональной связи величины γ от времени прихода сигнала от импульсного источника к пункту регистрации на заданном удалении (ее график представлен на см. рис. 5) можно определить величину γ , используя наблюдения с достаточно хорошим отношением сигнал/помеха.

Рис. 7 Контурный график поверхности $R_{conv}(\gamma, \varphi) = -R_{it}^-(\gamma_1, \gamma_2 = 0,6, N = 1,792, Z = 1,577, \varphi)$
 Fig. 7 Contour plot of the surface $R_{conv}(\gamma, \varphi) = -R_{it}^-(\gamma_1, \gamma_2 = 0,6, N = 1,792, Z = 1,577, \varphi)$

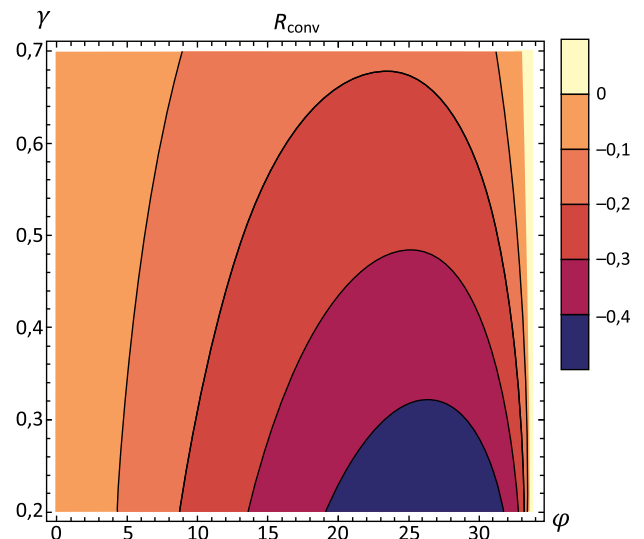
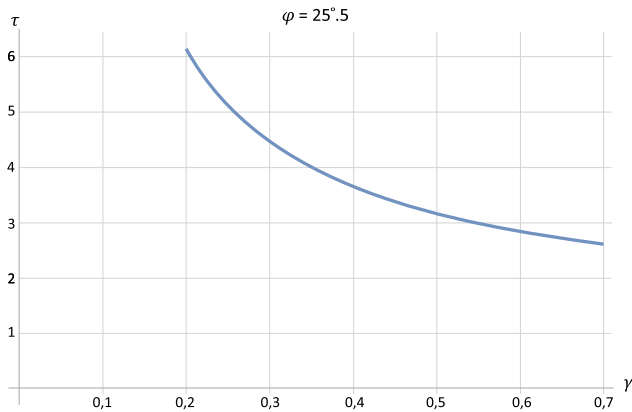


Рис. 8. Безразмерное время прихода сигнала, падающего в виде плоской продольной волны под углом $\varphi = 25^\circ.5$ на плоскую границу и рассеянного в поперечную волну, регистрируемую в точке, лежащей на плоскости, параллельной этой границе

Fig. 8 Dimensionless arrival time of a signal incident as a plane longitudinal wave at an angle $\varphi = 25^\circ.5$ on a plane boundary and scattering into a transverse wave taken at a point lying in a plane parallel to that boundary



ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Алгебраически точное решение уравнения (2.11) для $p = p(\zeta, \gamma)$ является положительным квадратным корнем из корня уравнения 4-й степени относительно p^2 , которое получено из (2.11) последовательным исключением радикалов с помощью их уединения и возведения получающихся уравнений в квадрат. Для исключения появившихся посторонних корней отобрано единственное решение, которое удовлетворяет физическим критериям (действительный, положительный и дающий точку конверсии со стороны пункта регистрации, т. е. как точка R см. рис 1)

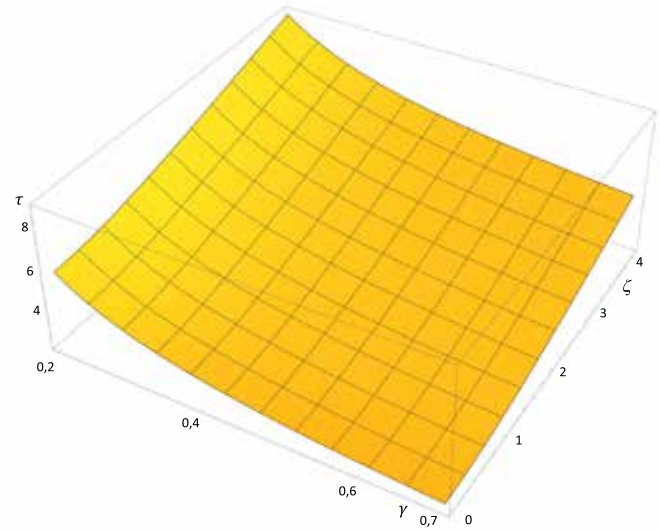
$$p(\zeta, \gamma) = \sqrt{\frac{\sqrt{A_8} + A_0}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4A_1}{3\zeta^4} - \frac{A_7^{1/3}}{3 \times 2^{1/3} \zeta^4} - \frac{2^{1/3} A_2 (-1 + \gamma^2)^2 (1 + \zeta^2)}{3A_7^{1/3} \zeta^4}} + \frac{2A_0^2}{\zeta^4} - \frac{8A_0 A_1 - 8A_0^3 - 16\gamma^2 \zeta^4 (1 + \gamma^2)(3 + \zeta^2)}{4\zeta^6 \sqrt{A_8}}}$$

Для компактификации записи использованы символы A_i для выражений, содержащих (ζ, γ) :

$$\begin{aligned} A_0 &\rightarrow (1 + \gamma^2)(1 + \zeta^2), \\ A_1 &\rightarrow 1 - 2\gamma^2 + \gamma^4 + 2\zeta^2 + 8\gamma^2 \zeta^2 + 2\gamma^4 \zeta^2 + \zeta^4 + 4\gamma^2 \zeta^4 + \gamma^4 \zeta^4, \\ A_2 &\rightarrow 1 - 2\gamma^2 + \gamma^4 + 3\zeta^2 + 18\gamma^2 \zeta^2 + 3\gamma^4 \zeta^2 + 3\zeta^4 - 6\gamma^2 \zeta^4 + \\ &\quad + 3\gamma^4 \zeta^4 + \zeta^6 - 2\gamma^2 \zeta^6 + \gamma^4 \zeta^6, \\ A_3 &\rightarrow 3\gamma^2 \zeta^2 + 3\gamma^4 \zeta^2 + \gamma^2 \zeta^4 + \gamma^4 \zeta^4, \\ A_4 &\rightarrow \zeta^2 + \gamma^2 \zeta^2 + \zeta^4 + \gamma^2, \\ A_5 &\rightarrow 4\gamma^4 \zeta^2 + \gamma^4 \zeta^4, \\ A_6 &\rightarrow -4(A_1^2 - 12A_3 A_4 + 12A_5 \zeta^4)^3 + (2A_1^3 - 36A_1 A_3 A_4 + \\ &\quad + 108A_4^2 A_5 + 108A_3^2 \zeta^4 - 72A_1 A_5 \zeta^4)^2, \end{aligned}$$

Рис. 9. Универсальный безразмерный годограф обменных PS-сигналов в зависимости от $\gamma = V_s/V_p$ и $\zeta = L/H$

Fig. 9. Universal dimensionless traveltime of the PS-mode-converted signals vs $\gamma = V_s/V_p$ and $\zeta = L/H$



$$\begin{aligned} A_7 &\rightarrow 2A_1^3 - 36A_1 A_3 A_4 + 108A_4^2 A_5 + \sqrt{A_6} + 108A_3^2 \zeta^4 - \\ &\quad - 72A_1 A_5, \\ A_8 &\rightarrow -\frac{2A_1}{3\zeta^4} + \frac{A_7^{1/3}}{3 \times 2^{1/3} \zeta^4} + \frac{2^{1/3} A_2 (-1 + \gamma^2)^2 (1 + \zeta^2)}{3A_7^{1/3} \zeta^4} + \\ &\quad + \frac{(1 + \gamma^2 + \zeta^2 + \gamma^2 \zeta^2)^2}{\zeta^4}. \end{aligned}$$

Безразмерный годограф $\tau = \tau(\zeta, \gamma)$ получен с помощью этого точного решения для $p = p(\zeta, \gamma)$ при его подстановке в (2.10). Общее представление о зависимости $\tau(\zeta, \gamma)$ дают рис. 9, 10. Все символьные вычисления выполнены с помощью системы компьютерной алгебры (“Computer Algebra System”).

В области значений ζ близких к нулю, годографы имеют формальный смысл, поскольку физические коэффициенты конверсии при отвесном падении плоских волн на плоскую границу стремятся к 0. Выделен годограф, соответствующий $\gamma = 1/\sqrt{3}$, т. е. выполнению гипотезы Пуассона.

Можно сравнить результаты точного вычисления годографа с часто применяемым гиперболическим годографом, который в безразмерном виде может быть представлен как

$$\tau_{\text{Гип}} = (1 + 1/\gamma) \sqrt{1 + (\zeta/2)^2}.$$

Как и следовало ожидать, чем ближе отношение γ к 1, тем меньше расхождение точного и приближенного гиперболического годографов и тем дальше по ζ оно становится значительным. Особенно существенным это расхождение становится при $\gamma < 0,5$ и удалениях $\zeta > 1$.

Рис. 10. Годографы в безразмерных величинах $\zeta = L/H$, $\tau = (tV_p)/H$ для различных значений $\gamma = V_s/V_p$
 Fig. 10. Traveltime plots presented with dimensionless values $\zeta = L/H$, $\tau = (tV_p)/H$ for different values of $\gamma = V_s/V_p$

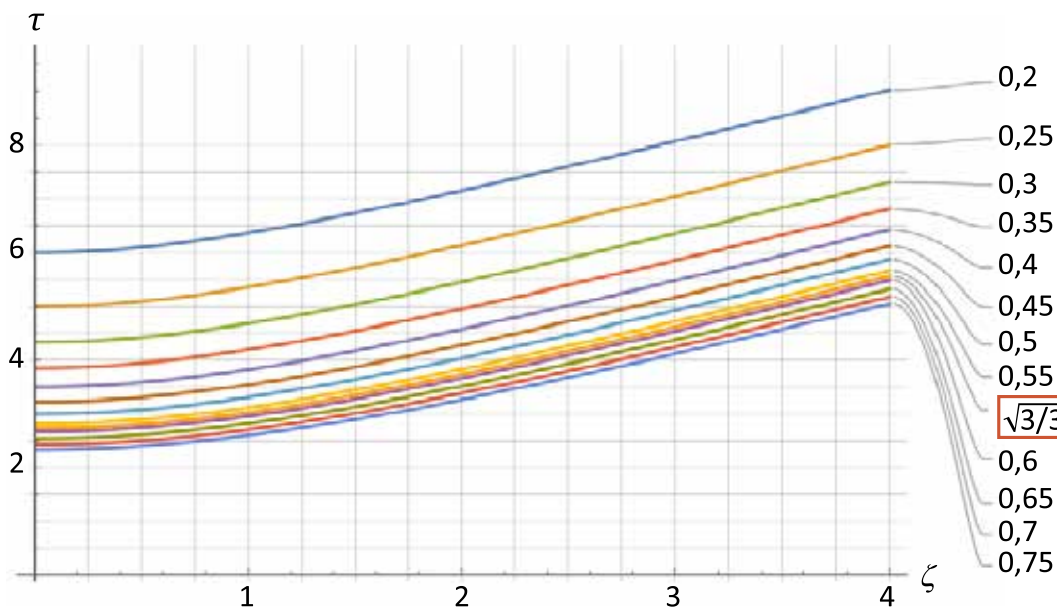
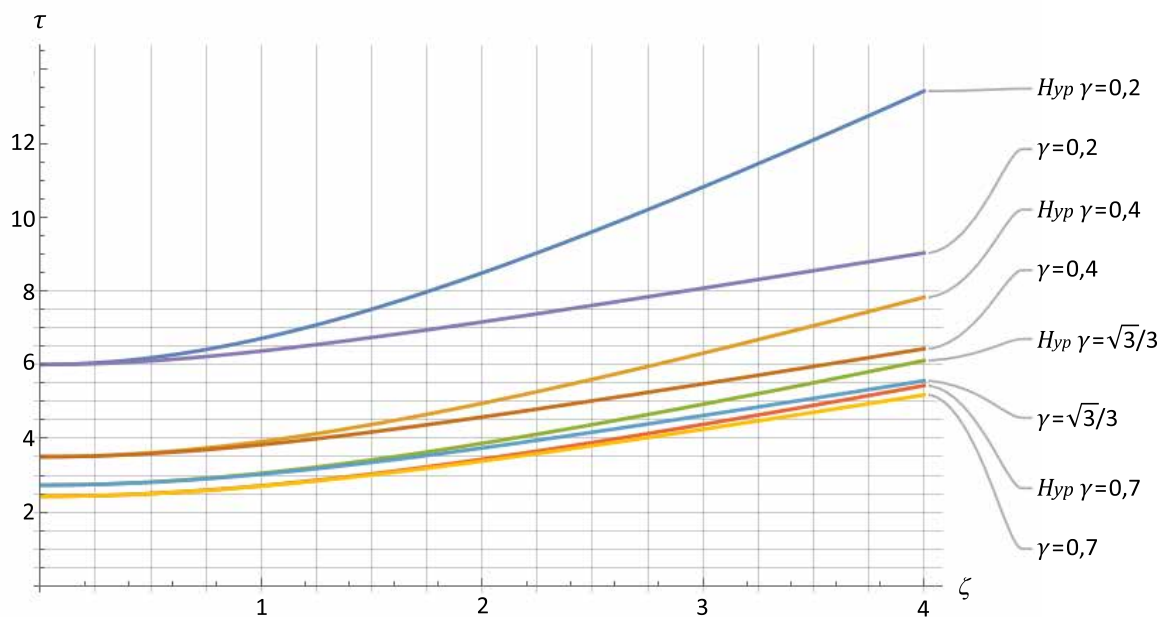


Рис. 11. Точные и гиперболические годографы для значений γ 0,2, 0,4, $\sqrt{3}/3$, 0,7
 Fig. 11. Exact and hyperbolic (“Hyp”) dimensionless traveltime plots for some values of γ 0,2, 0,4, $\sqrt{3}/3$, 0,7



Список источников

1. Баюк И.О., Шехтман Г.А. Петрофизические основы многоволновой сейсморазведки // Технологии сейсморазведки. – 2014. – № 3. – С. 5-24.
2. Пузырев Н.Н., Тригубов А.В., Бродов Л.Ю., Ведерников Г.В., Лебедев К.А., Оболенцева И.Р., Нефедкина Т.Н., Худобина Л.Н., Сибиряков Б.П., Куличихина Т.Н., Лебедева Г.Н., Каржева Л.В. Сейсмическая разведка методом поперечных и обменных волн. – М.: Недра, 1985. – 277 с.
3. Пузырев Н.Н., Лебедева Г.Н. Особенности годографов ОГТ PS при различных способах их формирования // Геология и геофизика. – 1986. – № 4. – С. 69–76.

4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика : В 10 т. Т.VII. Теория упругости. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 264 с.
5. Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. Основы механики сплошной среды. Курс лекций. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 272 с.
6. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – Т. 1. – М. : Наука, 1976. – 536 с.
7. Ляв А. Математическая теория упругости. – М. : ОНТИ, 1935. – 474 с.
8. Knott C.G. Reflexion and Refraction of Elastic Waves, with Seismological Application // *Philosophical Magazine and Journal of Science*. Ser. 5. – 1899. – Vol. 48. – pp. 64–97.
9. Zoeppritz K. Über Reflexion und Durchgang seismischer Wellen durch Unstetigkeitsflächen // *Nachrichten von der Gessellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*. – 1919. – pp. 64–84.
10. Christensen N.I. Poisson's ratio and crustal seismology // *Journal of Geophysical Research. Solid Earth*. – 1996. – Vol. 101. – Iss. B2. – pp. 3139–3156. DOI: 10.1029/95JB03446.
11. Castagna J.P., Baltzle M.L., Eastwood R.L. Relationships between compressional-wave and shear-wave velocities in clastic silicate rocks // *Geophysics*. – 1985. – Vol. 50. – Iss. 4. – pp.530–743. DOI: 10.1190/1.1441933.
12. Основания зданий и сооружений : Свод правил СП 22.13330 2016 [Электронный ресурс]. – Введён 01.07.2017. – Режим доступа: <https://docs.cntd.ru/document/456054206> (дата обращения 07.02.2025 г.).
13. Aki K., Richards P.G. Quantitative seismology / 2nd ed. – Sausalito : University Science Books, 2002. XVIII, 700 p.
14. Шехтман Г.А., Кузнецов В.М., Жуков А.П., Коротков И.П., Бурлаков А.В. Расширение типов волн, используемых в сейсморазведке: предпосылки и результаты // *Технологии сейсморазведки*. – 2006. –№ 3. – С. 30–34.
15. Лебедев Е.Б., Сонин Г.А. Глубинная обработка данных многоволновой сейсморазведки // ВНИГНИ-65. Люди, результаты и перспективы. – М. : ВНИГНИ, 2018. – С. 284–288.
16. Гамбурцев Г.А. Сейсмические методы разведки. Ч. 2. Методика сейсмической разведки и интерпретация наблюдений. – М. ; Л. : ОНТИ, 1938. – 139 с.
17. Берзон И.С., Ратникова Л.И., Рац-Хизгия М.И. Сейсмические обменные отраженные волны. – М. : Наука, 1966. – 223 с.
18. Алексеев В.Б. Теорема Абеля в задачах и решениях. – М. : МЦНМО, 2001. – 192 с.
19. Рыжак Е.И. Бескоординатное тензорное исчисление для механики сплошных сред. – М. : МФТИ, 2011. – 170 с.
20. Сейсморазведка: Справочник геофизика / под ред. И.И. Гурвича, В.П. Номоконова. – М. : Недра, 1981. – 464 с.

References

1. Bayuk I.O., Shekhtman G.A. Petrophysical basis of multicomponent seismic. *Tekhnologii seismorazvedki*. 2014;(3):5–24.
2. Puzyrev N.N., Trigubov A.V., Brodov L.Yu., Vedernikov G.V., Lebedev K.A., Obolentseva I.R., Nefedkina T.N., Khudobina L.N., Sibiryakov B.P., Kulichikhina T.N., Lebedeva G.N., Karzheva L.V. Seismicheskaya razvedka metodom poperechnykh i obmennykh voln [Seismic exploration using transverse and converted waves]. Moscow: Nedra; 1985. 277 p.
3. Puzyrev N.N., Lebedeva G.N. Distinctive features of CDP-PS travel-time curves in different methods of their formation. *Geologiya i geofizika*. 1986;(4):69–76.
4. Landau L.D., Lifshits E.M. Teoreticheskaya fizika : v 10 t. T.VII. Teoriya uprugosti [Theoretical Physics: In 10 volumes. Vol. VII. Theory of Elasticity.]. Moscow: FIZMATLIT; 2003. 264 p.
5. Pobedrya B.E., Georgievskii D.V. Osnovy mekhaniki sploshnoi sredy. Kurs leksii [Fundamentals of Continuum Mechanics. Lecture Course]. Moscow: FIZMATLIT, 2006. 272 p.
6. Sedov L.I. Mekhanika sploshnoi sredy [Continuum mechanics]. Vol. 1. Moscow: Nauka; 1976. 536 p.
7. Lyav A. Matematicheskaya teoriya uprugosti [Mathematical theory of elasticity]. Moscow: ONTI; 1935. 474 p.
8. Knott C.G. Reflexion and Refraction of Elastic Waves, with Seismological Application. *Philosophical Magazine and Journal of Science*. Ser. 5. 1899;48:64–97.
9. Zoeppritz K. Über Reflexion und Durchgang seismischer Wellen durch Unstetigkeitsflächen. *Nachrichten von der Gessellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*. 1919(1919):64–84.
10. Christensen N.I. Poisson's ratio and crustal seismology. *Journal of Geophysical Research. Solid Earth*. 1996;101(B2):3139–3156. DOI: 10.1029/95JB03446.
11. Castagna J.P., Baltzle M.L., Eastwood R.L. Relationships between compressional-wave and shear-wave velocities in clastic silicate rocks. *Geophysics*. 1985;50(4):530–743. DOI: 10.1190/1.1441933.
12. Soil bases of buildings and structures: Code of Practice SP 22.13330 2016. Introduced on 01.07.2017. Available at: <https://docs.cntd.ru/document/456054206> (accessed 07.02.2025).
13. Aki K., Richards P.G. Quantitative seismology. 2nd ed. Sausalito: University Science Books; 2002. XVIII, 700 p.
14. Shekhtman G.A., Kuznetsov V.M., Zhukov A.P., Korotkov I.P., Burlakov A.B. Rasshirenie tipov voln, ispol'zuemykh v seismorazvedke: predposylki i rezul'taty [Expansion of wave types used in seismic exploration: background and results]. *Tekhnologii seismorazvedki*. 2006;(3):30–34.
15. Lebedev E.B., Sonin G.A. Glubinnaya obrabotka dannykh mnogovolnovo seismorazvedki [Deep processing of multiwave seismic data]. In: VNIГNI-65. Lyudi, rezul'taty i perspektivy. Moscow: VNIГNI; 2018. pp. 284–288.
16. Gamburtsev G.A. Seismicheskie metody razvedki. Ch. 2. Metodika seismicheskoi razvedki i interpretatsiya nablyudenii [Seismic exploration methods. Part 2. Methodology of seismic exploration and interpretation of observations]. Moscow; Leningrad: ONTI; 1938. 139 p.
17. Berzon I.S., Ratnikova L.I., Rats-Khizgiya M.I. Seismicheskie obmennyye otrazhennyye volny [Seismic exchange reflected waves]. Moscow: Nauka, 1966. 223 p.

18. *Alekseev V.B.* Teorema Abelya v zadachakh i resheniyakh [Abel's theorem in problems and solutions]. Moscow: MTSNMO; 2001. 192 p.
19. *Ryzhak E.I.* Beskoordinatnoye tenzornoye ischislenie dlya mekhaniki sploshnykh sred [Coordinate-free tensor calculus for continuous media mechanics]. Moscow: MFTI; 2011. 170 p.
20. *Gurvich I.I., Nomokonov V.P.* (eds.) *Seismorazvedka: Spravochnik geofizika* [Seismic exploration: Geophysicist's handbook]. Moscow: Nedra; 1981. 464 p.

Статья поступила в редакцию 23.12.2024 г., одобрена после рецензирования 09.02.2025 г., принята к публикации 07.03.2025 г.
The article was submitted 23.12.2024; approved after reviewing 09.102.2025; accepted for publication 07.03.2025.

Информация об авторах

Рок Владимир Ефимович

Доктор физико-математических наук,
заведующий сектором компьютерного полноволнового
моделирования сейсмограмм
ФГБУ «Всероссийский научно-исследовательский
геологический нефтяной институт» («ВНИГНИ»)
117105 Москва, Варшавское ш., д. 8
e-mail: vladimir.rok@gmail.com
ORCID: 0000-0001-8651-4501
ResearcherID: H-4340-2013
SPIN-код: 8507-7500
AuthorID: 59363

Каплан Самуил Абрамович

Кандидат технических наук, заведующий отделом
Комплексной обработки и интерпретации данных
сейсморазведки и геофизических исследований скважин
отделения Геоинформатики
ФГБУ «Всероссийский научно-исследовательский
геологический нефтяной институт» («ВНИГНИ»)
117105 Москва, Варшавское ш., д. 8
e-mail: lab6-vniigeosistem@yandex.ru
SPIN-код: 4460-2676
AuthorID: 529794

Information about authors

Vladimir E. Rok

Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Head of the Sector of Computer full-wave modeling
of seismograms
All-Russian Research Geological Oil Institute
8, Warshavskoe sh., Moscow, 117105, Russia
e-mail: vladimir.rok@gmail.com
ORCID: 0000-0001-8651-4501
ResearcherID: H-4340-2013
SPIN-код: 8507-7500
AuthorID: 59363

Samuil A. Kaplan

Candidate of Technical Science (PhD),
Head of Division for Seismic and Geophysical wells data processing
and Interpretation of Geoinformatics Department
All-Russian Research Geological Oil Institute
8, Warshavskoe sh., Moscow, 117105, Russia
e-mail: lab6-vniigeosistem@yandex.ru
SPIN-код: 4460-2676
AuthorID: 529794