

УДК 550.83:681.3

© М.И. Шимелевич



**Введение**

В работе [9] предложена общая математическая модель преобразования геолого-геофизической информации с позиций теории информации Шеннона–Колмогорова [8]. Аппарат математической теории информации позволяет решать ряд важных прикладных и теоретических задач геофизики. В данной работе рассматриваются методы получения количественных априорных оценок потерь геофизической информации о строении среды в процессе ее преобразования при геофизических исследованиях. При этом устанавливается количественная связь между количеством информации о среде, содержащейся в наблюдаемых геофизических полях, и разрешающей способностью геофизического метода. Эти оценки служат количественной мерой информативности геофизического метода.

С математической точки зрения, вся цепочка преобразований геофизической информации о среде сводится к решению прямой и обратной задач для уравнения:

$$A_N s = e, s \in S_N \subset R^N, e \in R^M, \quad (1)$$

где  $s = (s_1, \dots, s_N)$  – вектор искомых параметров исследуемой среды;  $e = (e_1, \dots, e_M)$  – вектор данных, определяемый значениями характеристик ЭМ поля в точках фактической сети измерений  $\tau$  на поверхности Земли;  $R^N, R^M$  – конечномерные пространства размерности  $N, M$ , соответственно;  $S_N$  – множество допустимых значений векторов параметров среды. Для простоты изложения, в данной работе, будем полагать, что все параметры рассматриваемой задачи имеют одинаковый физический смысл и единый для всех параметров  $s_n, n = 1, \dots, N$  диапазон  $D_s$  допустимых изменений.

$$s_n \in D_s, n = 1, \dots, N. \quad (1.1)$$

Это выполняется, например, если искомой характеристикой среды является удельная электропроводность  $\sigma$  среды, а искомыми параметрами  $s_n$  задачи являются значения удельной электропроводности ячеек сетки задачи. В этом случае множество  $S_N$  является  $N$ -мерным замкнутым кубом в пространстве  $R^N$  со стороной равной  $D_s$ ;  $A_N$  – нелинейный

оператор, отображающий векторы параметров среды в векторы данных. Оператор  $A_N$  представляет собой суперпозицию преобразований  $A_0, F_N$  вида:

$$A_N s = A_0(F_N(s)) = A_0(\sigma_0) = e, N_0 \geq N, \quad (1.2)$$

где  $F_N$  – оператор параметризации, который проектирует параметризованную модель среды на сетку прямой задачи размерности  $N_0 \geq N, \sigma_0 = F_N(s)$  – вектор  $\sigma_0 = (\sigma_1, \dots, \sigma_{N_0})$ , полученный в результате проектирования вектора параметров  $s = (s_1, \dots, s_N)$  на сетку  $Q_0$  прямой задачи,  $A_0$  – исходный численный оператор прямой задачи на сетке  $Q_0$ . В этом случае параметризация сводится к укрупнению сетки прямой задачи, и обратная задача решается на укрупненной сетке  $Q_N$ .

**Разрешающая способность геофизического метода**

При решении обратных задач основной вопрос (помимо существования и единственности решения) состоит в том, насколько большими могут быть изменения  $\|\Delta s\|_{R^N}$  решения  $s$  уравнения (1) при заданных изменениях в правой части  $\|\Delta e\| \leq \delta$ , т.е. в степени эквивалентности (практической устойчивости) приближенных решений (1). Характеристикой степени эквивалентности в общем случае является характеристика  $\beta_N$  [14, 15]:

$$\beta_N(\delta) = \sup_{s, s' \in S} \|s' - s\|_{R^N}, \text{ при } \|A_N s' - A_N s\|_{R^M} \leq \delta, \quad (2)$$

где  $\|\cdot\|_{R^N}, \|\cdot\|_{R^M}$  – нормы в пространствах решений  $R^N$  и данных  $R^M$  соответственно. Выражение (2) представляет собой одну из форм определения модуля непрерывности обратного оператора уравнения (1) [5, 6]. Если отображение  $A_N$  взаимно-однозначное, то  $\beta_N(\delta) \rightarrow 0$ , при  $\delta \rightarrow 0$ . Обозначим через  $e = A_N s$  точную правую часть (1), соответствующую некоторому точному решению  $s$ . Пусть известно, что любой вектор входных данных  $e_\delta$  в уравнении (1) может быть определен с некоторой погрешностью по уровню, не превышающему заданной величины  $\delta_0$ :

$$\|e_\delta - A_N s\| \leq \delta_0. \quad (3)$$

Рассмотрим все теоретически возможные приближенные решения  $s_\delta \in S$  уравнения (1), сопоставимые по точности с исходными данными,

т.е. удовлетворяющие уравнению (1), при *точно заданной фиксированной правой части e с невязкой*, не превышающей величину  $\delta_0$ :

$$\|A_N s_\delta - e\|_{R^M} \leq \delta_0, \quad (3.1)$$

Эти решения образуют множество  $S_\delta(e)$  теоретических эквивалентных решений, а соответствующие им вычисляемые геофизические поля  $A_N s_\delta$  образуют множество  $E_\delta(e)$  теоретических эквивалентных правых частей уравнения (1), при точно заданной правой части  $e = A_N s$ :

$$A_N s_\delta \in E_\delta(e), \text{ если } \|A_N s_\delta - e\| \leq \delta_0. \quad (3.2)$$

Из (3.1), (2) следует, что любое теоретическое эквивалентное решение  $s_\delta$  отличается от точного  $s$  не более чем на величину  $\beta_N(\delta_0)$ :

$$\|s_\delta - s\|_{R^N} \leq \beta(\delta_0), \text{ при } \|A_N s_\delta - e\| \leq \delta_0. \quad (3.3)$$

Физический смысл характеристики  $\beta_N(\delta)$ , таким образом, заключается в том, что при  $\delta = \delta_0$  она определяет степень эквивалентности (максимальную погрешность) приближенных решений задачи (1), при заданном уровне погрешности данных  $\delta_0$  [6]. Чем больше величина  $\beta_N(\delta)$ , при фиксированном значении  $\delta$ , тем больше может быть погрешность получаемых приближенных решений и степень их эквивалентности. С характеристикой  $\beta_N(\delta)$  связано понятие *разрешающей способности геофизического метода*, основанного на решении уравнения (1) с заданным оператором прямой задачи  $A_N$  [4, 14, 15]. *Разрешающая способность* (понятие, пришедшее из оптики) некоторого оптического устройства это величина, обратно пропорциональная *пределу разрешения* – наименьшему расстоянию между двумя точками, начиная с которого их изображения в используемом устройстве становятся неразличимыми для наблюдателя. Для того, чтобы гарантированно отличить друг от друга два вектора  $e, e'$  данных уравнения (1), которые определены с погрешностью  $\delta_0$ , они должны отличаться по норме пространства данных более чем на  $2\delta_0$  (см., например, [2]). Из (2) следует, что если два произвольных вектора  $s', s$  отличаются друг от друга в пространстве решений более, чем на  $\beta(2\delta_0)$ , то соответствующие им расчетные поля  $A_N s', A_N s$  отличаются больше чем на  $2\delta_0$ : если  $\|s' - s\|_{R^N} > \beta(2\delta_0)$ , то  $\|A_N s' - A_N s\|_{R^N} > 2\delta_0$ . (4.1)

В этом случае векторы  $s', s$  *гарантированно различимы* в наблюдаемых полях, при заданном уровне погрешности  $\delta_0$ , и вектор  $s'$  не может являться теоретическим эквивалентным решением по отношению к  $s$ . Если же для любых двух векторов  $s', s$  выполняется условие

$$\|s' - s\|_{R^N} \leq \beta(2\delta_0), \quad (4.2)$$

то векторы  $s', s$  могут оказаться эквивалентными решениями уравнения (1), неразличимыми в наблюдаемых полях. Таким образом, в соответствии с (4.1), (4.2) *пределом разрешения* точного обратного

оператора уравнения (1) (т.е. пределом разрешения геофизического метода, связанного с уравнением (1)), при заданном уровне погрешности  $\delta_0$ , является величина  $\beta(2\delta_0)$ , а *разрешающая способность обратного оператора* определяется выражением:

$$r_N(\delta_0) = \frac{a}{\beta(2\delta_0)}, \quad (5)$$

где  $a$  – нормировочный коэффициент. Чем больше  $\beta(2\delta_0)$ , при заданном значении  $\delta_0$ , тем больше степень эквивалентности решений, хуже разрешение и меньше разрешающая способность  $r_N(\delta_0)$  метода. Использование модуля непрерывности (2) обратного оператора позволяет обобщить понятие разрешающей способности метода, введенное в работе [1], на нелинейные задачи [14, 15].

Рассмотрим частный, но важный для практики случай, когда расстояние между векторами  $s', s$  в пространстве решений  $R^N$  определяется равномерной нормой вида:

$$\|\Delta s\|_1 = \|s' - s\|_1 = \max_{1 \leq n \leq N} |s'_n - s_n|, \quad (6)$$

Пределом разрешения  $\beta_N^1(2\delta_0)$  обратного оператора по норме (6) является величина минимального интервала изменения параметров задачи

$$\beta_N^1(2\delta_0) = \varepsilon(N, 2\delta_0). \quad (7)$$

начиная с которого векторы параметров становятся неразличимыми (эквивалентными) в наблюдаемых геофизических полях (т.е. выполняется (4.2)). Разрешающая способность обратного оператора в этом случае, согласно (5), есть величина, обратная к  $\varepsilon(N, 2\delta_0)$ , которая по своему смыслу должна определять максимальное число  $r_{\max} \sim \frac{D_s}{\varepsilon(N, 2\delta_0)}$  различных градаций искомого параметра задачи в диапазоне  $D_s$ . Например, для параметров  $s_n = \sigma_n$ , определяющих значения  $\sigma_n$  удельной электропроводности ячеек сетки задачи, величина  $r_{\max}$  определяет максимальное число различных *градаций цвета* в цветовой легенде, которые могут быть выделены при графическом представлении получаемых результатов инверсии в виде геоэлектрического разреза, при заданном разрешении  $\varepsilon(N, 2\delta_0)$  задачи. В пределах одного цвета значения  $\sigma_n$  удельной электропроводности, согласно (4.2), являются эквивалентными. Аналогичным образом в математической теории связи при передаче сообщений точки пространства сообщений, эквивалентные для получателя, группируются и рассматриваются как одна точка, и затем передаются лишь *эффективные координаты* [12].

Опираясь на результаты, полученные в [7], можно показать, что максимальное число градаций с шагом  $> \varepsilon(N, 2\delta_0)$  равно:

$$r_{\max}(N, \delta_0) = \frac{D_s}{\varepsilon(N, 2\delta_0)}, \text{ при } \frac{D_s}{\varepsilon(N, 2\delta_0)} \text{ целым,} \quad (8)$$

$$r_{\max}(N, \delta_0) = \left\lceil \frac{D_s}{\varepsilon(N, 2\delta_0)} \right\rceil + 1, \text{ при } \frac{D_s}{\varepsilon(N, 2\delta_0)} \text{ нецелом, (8.1)}$$

где  $[x]$  обозначает целую часть числа  $x$ . Формулы (8), (8.1) определяют разрешающую способность обратного оператора по норме (6).

Отметим некоторые свойства разрешающей способности обратного оператора, которые нам понадобятся в дальнейшем. В работе [15], на примере задач магнитотеллурики, численно показано, что с увеличением детальности  $N$  сетки обратной задачи растет степень эквивалентности решений обратной задачи и соответственно уменьшается разрешающая способность  $r_{\max}(N, \delta_0)$  метода:

$$r_{\max}(N_2, \delta_0) \leq r_{\max}(N_1, \delta_0), \text{ при } N_2 > N_1. \quad (9.1)$$

Это означает, что нельзя одновременно добиться большой пространственной детальности  $N$  и высокой разрешающей способности  $r_{\max}(N, \delta_0)$ , т.е. действует некий «принцип неопределенности», согласно которому произведение  $N \cdot r_{\max}(N, \delta_0)$  может изменяться в пределах достаточно узкого интервала  $[p_1, p_2]$ , определенного свойствами оператора прямой задачи:

$$p_1 \leq N \cdot r_{\max}(N, \delta_0) \leq p_2. \quad (9.2)$$

Задача *эффективной параметризации* модели среды с максимальной пространственной детальностью  $N_{\max}(r_1, \delta_0)$  по пространству, при заданной разрешающей способности  $r_1$ , необходимость постановки которой отмечалась в работах [1, 4], рассмотрена и решена в [15]. В этой же работе показано, что степень эквивалентности решений уравнений (1), при определенных условиях, может быть уменьшена, а значит, разрешающая способность  $r_N(\delta_0)$  повышена, за счет использования нескольких критериев инверсии. Методы и примеры расчета характеристик  $\beta(\delta)$ ,  $r_{\max}(N, \delta_0)$  и их аналогов рассмотрены в работе [14].

### Модель преобразования геофизической информации о среде

Рассмотрим методы *оценки потерь геофизической информации* о строении среды в процессе ее преобразования при геофизических исследованиях с позиций «невероятностной» теории информации Шеннона-Колмогорова. Разобьем диапазон  $D_s$  возможных значений искомого параметра задачи на градации, т.е. перейдем к квантованным значениям  $d_r, r = 1, \dots, r_0$  проекций векторов параметров  $\hat{s}_n = (\hat{s}_{n,1}, \hat{s}_{n,2}, \dots, \hat{s}_{n,r_0})$  с некоторым *априори заданным* числом  $r_0$  градаций с шагом  $\varepsilon_0$ :

$$\hat{s}_{n,r} - \hat{s}_{n,r+1} = \varepsilon_0, r = 1, \dots, r_0 - 1, n = 1, 2, \dots, N, (10)$$

где  $r_0, \varepsilon_0$  связаны соотношением:

$$r_0 = \frac{D_s}{\varepsilon_0}. \quad (10.1)$$

Обозначим через  $S_{0\varepsilon}$  дискретное конечное множество векторов  $\hat{s}^i, i = 1, \dots, M_0$  размерности  $N_0$  с квантованными проекциями вида (10). В терминах теории информации это множество представляет собой информационный объект, отражающий свойства исследуемой среды с максимальной пространственной детальностью  $N_0$  на сетке  $Q_0$  прямой задачи. Состояниями (элементами) объекта  $S_{0\varepsilon}$  являются векторы  $\hat{s}^i, i = 1, \dots, M_0$  параметров, которым соответствуют различные геоэлектрические разрезы. Число  $M_0$  различных элементов в объекте  $S_{0\varepsilon}$  равно величине:

$$M_0 = r_0^{N_0}. \quad (10.2)$$

Модель среды, определяемая объектом  $S_{0\varepsilon}$ , является *исходной интерпретационной моделью*, которая соответствует *минимальной априорной информации* об исследуемой среде и представляет собой наиболее широкий модельный класс сред, в котором могут рассматриваться решения практической обратной задачи. При формировании исходной модели  $S_{0\varepsilon}$  в качестве *априорной информации* задаются максимальная возможная пространственная детальность  $N_0$  описания среды, соответствующая сетке прямой задачи, максимально возможный диапазон  $D_s$  изменения искомого параметра и *максимальное число*  $r_0$  различных градаций, которое определяется из опыта геофизических исследований и на основе численных расчетов. Таким образом, исходная модель  $S_{0\varepsilon}$  аппроксимирует произвольную реальную исследуемую среду с максимально возможной, с точки зрения практики, точностью. Например, для реальных геоэлектрических разрезов Сибирской платформы  $r_0 \sim 10-15$ , максимально возможный диапазон  $D_s$  изменения удельного сопротивления среды для задач магнитотеллурики составляет  $1-10^4$  Ом·м, а размерности  $N_0$  сеток прямых задач определяются мощностью используемых компьютеров.

**Замечание 1.** В случае если имеется априорная информация о среде (например, информация о том, что максимальные диапазоны  $D_{si}$  изменения искомого параметра отдельных  $i$ -х областей исследуемой среды меньше  $D_s$  и т.п.), то это может быть соответствующим образом количественно учтено при формировании модели исходного объекта  $S_{0\varepsilon}$ .

Схематически укрупненные этапы преобразования реальной геофизической информации (т.е. преобразования исходного объекта  $S_{0\varepsilon}$ ) в процессе геофизических исследований можно представить в виде:

$$S_{0\varepsilon} \xrightarrow{U_N} S_{N\varepsilon} \xrightarrow{A_N} E \xrightarrow{\varepsilon(\delta_0, E)} E' \xrightarrow{\hat{A}_N^{-1}} S'_{N\varepsilon}, (11)$$

где  $S_{0\varepsilon}$  – исходный объект;  $S_{N\varepsilon}$  – параметризованный объект размерности  $N \leq N_0$ , который образуется путем преобразования исходного объекта  $S_{0\varepsilon}$  с помощью оператора  $U_N$  (обратного по отношению

к оператору параметризации  $F_N$ ) укрупнения пространственных структурных элементов исходной модели  $S_{0e}$  (в простейшем случае путем объединения ячеек сетки прямой задачи). Оператор  $U_N$  является вырожденным, так как, при укрупнении, несколько элементов отображаются в один;  $E$  – объект, состояния которого характеризуют свойства расчетных геофизических полей, он формируется с помощью оператора прямой задачи  $E = A_N S_{Ne}$ ;  $E'$  – объект, состояния которого характеризуют свойства расчетных полей, искаженных шумами различной природы  $E' = \xi(\delta_0, E)$ ;  $\xi(\delta_0, E)$  – некоторая (неизвестная) функция шума;  $S'_N$  – объект, состояния которого характеризуют свойства приближенных решений задачи в результате инверсии наблюдаемых данных.

Целью данной работы является получение априорных оценок потерь геофизической информации о среде без учета ошибок инверсии (так как последние зависят от конкретного применяемого метода решения обратной задачи) в цепочке преобразований (11) за, исключением последнего этапа:

$$S_{0e} \xrightarrow{U_N} S_{Ne} \xrightarrow{A_N} E \xrightarrow{\xi(\delta_0, E)} E'. \quad (11.1)$$

Потери информации о строении среды (т.е. об исходном объекте  $S_{0e}$ ) в цепочке (11.1) могут происходить сначала на этапе  $S_{0e} \xrightarrow{U_N} S_{Ne}$  за счет уменьшения числа параметров задачи, на этапе  $S_{Ne} \xrightarrow{A_N} E$  – за счет отсутствия единственности решений обратной задачи и на этапе  $E \xrightarrow{\xi(\delta_0, E)} E'$  – за счет погрешности данных.

Рассмотрим исходное уравнение (1) на множестве  $S_{Ne}$ , полученном в результате дискретизации множества допустимых решений  $S_N$  по правилу (10). Исходному непрерывному уравнению (1) соответствует его дискретный аналог:

$$A_N \hat{s} = e, \quad \hat{s} \in S_{Ne}, \quad N \leq N_0. \quad (12)$$

При  $N = N_0$  дискретное уравнение (12) отражает всю цепочку преобразований (11.1). При  $N < N_0$  цепочка (11.1) вырождается в укороченную:

$$S_{Ne} \xrightarrow{A_N} E \xrightarrow{\xi(\delta_0, E)} E', \quad (13)$$

так как решения (12) всегда ищутся на параметризованном множестве  $S_{Ne}$ , а переход от  $S_{Ne}$  к  $S_{0e}$  невозможен в силу вырожденности оператора  $U_N$ . В дальнейшем мы будем рассматривать цепочку преобразований (13) при  $N \leq N_0$ , которая включает все этапы, необходимые для получения априорных оценок потерь информации о среде.

### Определение количества информации о среде, содержащейся в геофизических полях

Рассмотрим процесс преобразования информации о среде в цепочке (13). Параметризованный объект  $S_{Ne}$ , определяющий множество искомых решений дискретного уравнения (12), представляет собой конечный набор векторов  $\hat{s}^i, i = 1, \dots, M_N$  размерности  $N$

с проекциями, квантованными по правилу (10), число которых равно

$$M_N = r_0^N. \quad (14)$$

Нас будет интересовать наиболее общий случай, когда квантованные значения  $d_r, r = 1, \dots, r_0$  искомого параметра равновероятны, а значит и равновероятны все состояния  $\hat{s}^i$  объекта  $S_{Ne}$ :

$$p_i(\hat{s}^i) = \frac{1}{M_N}, \quad i = 1, \dots, M_N, \quad (14.1)$$

где  $p_k(x_k)$  – вероятность величины  $x_k$ . Если все состояния  $\hat{s}^i$  равновероятны, то говорят, что объект  $S_{Ne}$  обладает энтропией  $H(S_{Ne})$  «неслучайного объекта» [11], равной с учетом (14), (14.1) величине (в данной работе везде значком  $\log$  обозначается логарифм по основанию 2):

$$H(S_{Ne}) = \log M_N = N \log r_0. \quad (15)$$

Если наблюдается сама искомая геофизическая среда, т.е. непосредственно сам объект  $S_{Ne}$ , то наблюдатель располагает всей информацией об этом объекте. Эта информация объекта «о себе самом» (собственная информация) равна энтропии объекта [8]:

$$I(S_{Ne}, S_{Ne}) = H(S_{Ne}) = \log M_N = N \log r_0. \quad (15.1)$$

При  $N = N_0$  из (15.1) получаем собственную априорную информацию  $I(S_{0e}, S_{0e})$  исходного объекта  $S_{0e}$ :

$$I(S_{0e}, S_{0e}) = H(S_{0e}) = \log M_{N_0} = N_0 \log r_0. \quad (15.2)$$

Теоретический и практический интерес представляет оценка количества информации  $I(S_{Ne}, E')$  об объекте  $S_{Ne}$  (т.е. о среде), которая содержится в объекте  $E'$  (наблюдаемых полях). Эта информация, по определению, равна величине [13]:

$$I(S_{Ne}, E') = H(S_{Ne}) - H(S_{Ne} | E'), \quad (16)$$

где  $H(S_{Ne} | E')$  – условная энтропия, которая характеризует степень неопределенности знания интерпретатора о строении среды (т.е. степень неопределенности состояния объекта  $S_{Ne}$ ), оставшуюся после наблюдения геофизических полей (т.е. после наблюдения объекта  $E'$ ). Величина  $H(S_{Ne} | E')$  определяет потери информации в цепочке преобразований (13). Если отображение  $A_N$  взаимно-однозначное, то на этапе  $S_{Ne} \xrightarrow{A_N} E$  потери информации (энтропии) не происходит, объект  $E$  может принимать такое же число  $M_N$  различных состояний  $e^i = A_N \hat{s}^i, i = 1, \dots, M_N$ , что и исходный объект  $S_{Ne}$  [10], и энтропии  $S_{Ne}, E$  равны:

$$H(E) = H(S_{Ne}) = N \log r_0. \quad (17)$$

Если известно, что данные могут содержать погрешность, то в цепочке (13) происходят потери информации. Обозначим через  $e^i = A_N \hat{s}^i$  точную правую часть уравнения (12), соответствующую точному вектору  $\hat{s}^i$  параметров среды. Уравнению (12), при точно заданной фиксированной правой части  $e^i$ , с невязкой, не превышающей заданную величину  $\delta_0$ , удовлетворяет некоторое конечное

множество  $S_{\delta}^i$  теоретических эквивалентных решений  $\hat{s}^j, j = 1, \dots, M_{\delta}^i$  (включающее точное решение  $\hat{s}^i$ ). Степень неопределенности объекта  $S_{N_{\varepsilon}}$  при прохождении вектора  $\hat{s}^i$  параметров среды по цепочке преобразований (13), таким образом, определяется числом  $M_{\delta}^i$  равновероятных эквивалентных решений  $\hat{s}^j, j = 1, \dots, M_{\delta}^i$ . Опираясь на общие принципы расчета взаимной информации двух объектов, изложенные в [16], применительно к рассматриваемому случаю, можно получить, что условная энтропия объекта  $S_{N_{\varepsilon}}$  при указании элемента  $e^i$  объекта  $E'$  определяется выражением:

$$H(S_{N_{\varepsilon}} | e^i) = \log M_{\delta}^i, \quad (18)$$

а полная условная энтропия  $H(S_{N_{\varepsilon}} | E')$ , при прохождении по цепочке (13) всех векторов  $\hat{s}^i$  параметров среды (с учетом того, что все состояния  $\hat{s}^i$  объекта  $S_{N_{\varepsilon}}$  и соответствующие им состояния  $e^i = A_N \hat{s}^i$  равновероятны), равна

$$H(S_{N_{\varepsilon}} | E') = \sum_{i=1}^{M_N} \frac{1}{M_N} \log M_{\delta}^i = \frac{1}{M_N} \sum_{i=1}^{M_N} \log M_{\delta}^i. \quad (19)$$

Отсюда, с учетом равенств (15), (16), получаем, что количество информации  $I(S_{N_{\varepsilon}}, E')$  об объекте  $S_{N_{\varepsilon}}$  (т.е. о среде), которое содержится в объекте  $E'$  (наблюдаемых полях), равно

$$\begin{aligned} I(S_{N_{\varepsilon}}, E') &= H(S_{N_{\varepsilon}}) - H(S_{N_{\varepsilon}} | E') = \\ &= \log M_N - \frac{1}{M_N} \sum_{i=1}^{M_N} \log M_{\delta}^i, \end{aligned} \quad (20)$$

или, после несложных преобразований:

$$I(S_{N_{\varepsilon}}, E') = \sum_{i=1}^{M_N} \frac{1}{M_N} \left( \log \frac{M_N}{M_{\delta}^i} \right), N \leq N_0. \quad (21)$$

Формула (21), полученная для «неслучайного» объекта  $S_{N_{\varepsilon}}$ , соответствует исходной модели среды, построенной на основе минимальной априорной информации о ней (см. замечание 1), и может быть обобщена на случаи, когда имеется какая-либо дополнительная априорная информация.

Условная энтропия  $H(S_{N_{\varepsilon}} | E')$ , определяющая потери информации в цепочке преобразований (13), является неслучайной характеристикой оператора  $A_N$  и наряду с характеристикой  $\beta_N(\delta)$  определяет степень эквивалентности решений задачи в терминах теории информации. В отличие от  $\beta_N(\delta_0)$ , характеристика  $H(S_{N_{\varepsilon}} | E')$  определяет среднюю массивность множеств эквивалентных решений задачи, тогда как  $\beta_N(\delta)$  характеризует их максимальный «размер» и служит характеристикой степени эквивалентности (практической устойчивости) получаемых приближенных решений с теоретико-функциональных позиций. Характеристики  $H(S_{N_{\varepsilon}} | E')$ ,  $I(S_{N_{\varepsilon}}, E')$  теоретически всегда могут быть рассчитаны, в соответствии с (18), (19), (20), простым перебором (в силу конечности множества  $S_{N_{\varepsilon}}$ ). Обе характеристики зависят от свойств операторов  $A_0, A_N$ , структуры

данных и растут с увеличением уровня  $\delta_0$  погрешности наблюдаемых полей.

### Связь информации $I(S_{N_{\varepsilon}}, E')$ о среде с разрешающей способностью метода

Потери информации и разрешающая способность обратного оператора определяются одним и тем же фактором – существованием эквивалентных решений уравнения (12), поэтому можно ожидать, что эти характеристики связаны функциональной зависимостью. Вычислим предел разрешения  $\varepsilon(N, 2\delta_0)$  точного обратного оператора уравнения (12) для нормы (6). Все теоретические эквивалентные решения  $\hat{s}^j, j = 1, \dots, M_{\delta}^i$ , соответствующие фиксированной правой точной части  $e^i = A_N \hat{s}^i$ , с невязкой, не превышающей заданную величину погрешности данных  $\delta_0$ , по определению находятся в интервале  $\varepsilon(N, 2\delta_0)$ :

$$\|\hat{s}^{ji} - \hat{s}^{ki}\|_1 \leq \varepsilon(N, 2\delta_0), j, k = 1, \dots, M_{\delta}^i. \quad (22)$$

Число  $M_{\delta}^i$  эквивалентных решений в формуле (21) определяется числом мелких градаций  $d_p$ , которые умещаются в расчетном интервале разрешения  $\varepsilon(N, 2\delta_0)$ , т.е. отношением  $\varepsilon(N, 2\delta_0)/\varepsilon_0$ . Исходя из этого и учитывая соотношения (8), (10.1), (14), можно получить выражение для информации  $I(S_{N_{\varepsilon}}, E')$ , с использованием понятия разрешающей способности  $r_{\max}(N, \delta_0)$ :

$$I(S_{N_{\varepsilon}}, E') = N \cdot \log r_{\max}(N, \delta_0). \quad (23)$$

Отметим основные свойства информации  $I(S_{N_{\varepsilon}}, E')$ .

1) Количество информации  $I(S_{N_{\varepsilon}}, E')$  о среде, содержащейся в наблюдаемых полях, является неслучайной *информационной характеристикой* оператора  $A_N$  задачи и зависит от разрешающей способности задачи, а также от структуры и уровня погрешности  $\delta_0$  входных данных.

2) Информация о среде  $I(S_{N_{\varepsilon}}, E')$  учитывает одновременно два взаимосвязанных информационных фактора: детальность по пространству  $N$  и число  $r_{\max}(N, \delta_0)$  надежно выделяемых градаций искоемых параметров задачи, и поэтому служит *мерой информативности геофизического метода*, связанного с решением уравнения (1).

3) Согласно «*принципу неопределенности*» (9.3), нельзя одновременно добиться большой пространственной детальности параметризации  $N$  среды и высокой разрешающей способности  $r_{\max}(N, \delta_0)$ . Это приводит к тому, что увеличение одного из сомножителей  $N \cdot \log r_{\max}(N, \delta_0)$  компенсируется уменьшением второго, что препятствует прохождению информации от среды к наблюдаемым полям и не допускает больших изменений самой информации  $I(S_{N_{\varepsilon}}, E') = N \cdot \log r_{\max}(N, \delta_0)$ . На практике приходится выбирать оптимальное соотношение между  $N$  и  $r_{\max}(N, \delta_0)$ ,

которое определяет соответствующее доступное для интерпретатора количество информации.

4) Без уменьшения пространственной детальности, информация о среде может быть увеличена за счет комплексования входных признаков, при многокритериальной инверсии, так как в этом случае, при определенных условиях, возрастает разрешающая способность многокритериального обратного оператора [4, 15].

**Примеры численного расчета информации  $I(S_{N\varepsilon}, E')$**

Рассмотрим численный пример расчета количества информации и ее потерь в задачах магнитотеллурики. На рис. 1а схематически представлен фрагмент исследуемой 2D области, соответствующей задаче съемки верхней части разреза методом АМТЗ. Исходная модель среды  $G_0^{2D}$  задана на равномерной сетке прямой задачи  $7 \times 62$  с общей размерностью  $N_0 = 434$  ячейки. В качестве параметров обратной задачи были приняты логарифмы удельных сопротивлений ячеек сетки  $s_n = \lg \frac{\rho}{\sigma_n} = \lg \rho_n$ ; диапазон  $D_s$  возможных изменений параметров  $s_n$  в (1.1) определен величиной интервала  $[0 \leq s_n \leq 4]$ ,  $n = 1, \dots, N$ .

На рис. 1 б, в, г представлены варианты параметризованных моделей  $G_{11}^{2D}$ ,  $G_{12}^{2D}$ ,  $G_{13}^{2D}$  на укрупненных в нижней части разрезов сетках обратной задачи с числом параметров  $N = 341, 279, 269$  соответственно. Укрупнение производилось на самых глубоких ярусах сетки, так как именно они оказывают основное влияние на разрешающую способность  $r_{\max}(N, \delta_0)$ . При расчете значений  $r_{\max}(N, \delta_0)$  разрешающей способности для различных  $N$  использовались расчетные значения импедансов  $TM, TE$  мод АМТ поля в узлах сетки прямой задачи, при  $z = 0$ , на заданной сетке частот в диапазоне от 20 000 до 100 Гц.

Зададимся *априорным* числом различных градаций  $r_0 = 10$ . Соответствующая собственная априорная информация о среде (т.е. об исходном объекте  $S_{0\varepsilon}$ ) в соответствии с (15.2) составляет  $I_a(S_{0\varepsilon}, S_{0\varepsilon}) = H(S_{0\varepsilon}) = N_0 \log r_0 = 434 \cdot \lg 10 = 1442$  бита. В табл. 1 приведены расчетные значения информации  $I(S_{N\varepsilon}, E')$  для моделей  $G_{11}^{2D}$ ,  $G_{12}^{2D}$ ,  $G_{13}^{2D}$  и относительные потери информации:

$$\Delta I_0 = \frac{H(S_{0\varepsilon}) - I(S_{N\varepsilon}, E')}{(HS_{0\varepsilon})}$$

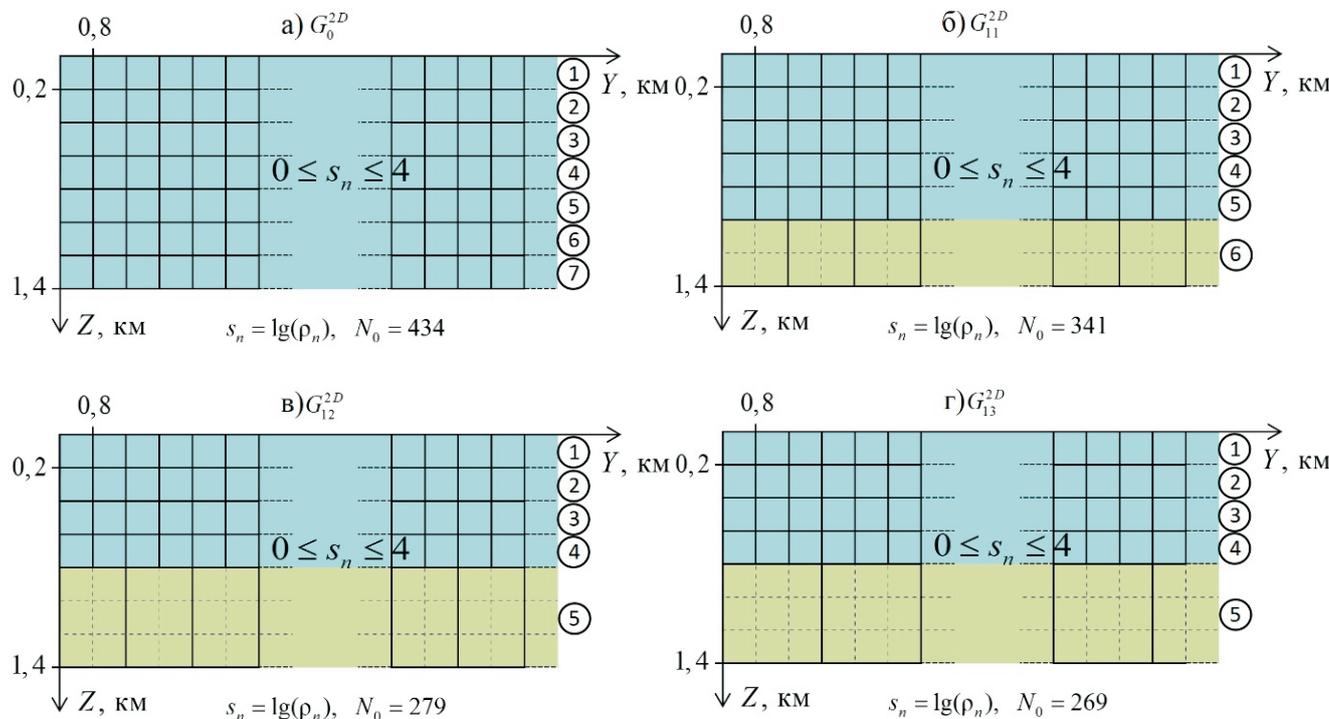


Рис. 1. Схемы сеток прямой и обратной 2D задач детальной съемки верхней части разреза методом АМТЗ. Приведены фрагменты исследуемой области без учета переходных областей: а) для исходной модели  $G_0^{2D}$  на равномерной сетке прямой задачи с числом узлов  $N = 434$ ; б), в), г) – для параметризованных моделей сред  $G_{11}^{2D}$ ,  $G_{12}^{2D}$ ,  $G_{13}^{2D}$  на укрупненных в нижней части разрезов сетках обратной задачи с числом параметров  $N = 341, 279, 269$  соответственно

по сравнению с исходной *априорной* информацией  $I_a(S_{0e}, S_{0e}) = H(S_{0e})$ , в зависимости от числа  $N \leq N_0$  параметров задачи (в скобках в третьей колонке указано относительное уменьшение числа параметров  $N$ , по сравнению с максимальным  $N_0 = 434$ ), при уровне погрешности  $\delta_0 = 0,01$ . Расчеты проводились отдельно для  $TE$  моды и для объединения мод  $TE \oplus TM$ . Анализ результатов, представленных в табл. 1, для  $TE$  моды показывает, что:

1) при максимальной детальности ( $N = N_0 = 434$ ) сетки, совпадающей с сеткой прямой задачи, расчетное число *различимых градаций*  $r_{max}(N, \delta_0) = 3$  значительно меньше априорно заданного  $r_0$ , что обуславливает значительные относительные потери информации  $\Delta I_0 = 52\%$ ;

2) при укрупнении сетки и соответственном уменьшении числа параметров  $N < N_0$ , возрастает разрешающая способность оператора  $r_{max}(N, \delta_0)$ . При этом абсолютная величина информации  $I(S_{0e}, E')$  сначала уменьшается при  $N = 341$ , а затем начинает расти, так как доминирующее влияние на информацию, при увеличении  $r_{max}(N, \delta_0)$ , начинает оказывать сама величина  $r_{max}(N, \delta_0)$ . Минимальные потери информации 27% соответствуют максимальному расчетному числу *различимых градаций*  $r_{max}(N, \delta_0) = 15$ , однако при этом пространственная детальность  $N = 269$  уменьшается на 38%, по сравнению с максимальной  $N_0 = 434$ . Наиболее близким к желаемому максимальному числу градаций  $r_0 = 10$  является вариант параметризации с  $N = 279$  и  $r_{max}(N, \delta_0) = 8$ , при котором потери информации

составляют 42%. В целом, для  $TE$  моды наблюдается низкая информативность метода;

3) использование объединенных данных по двум  $TE \oplus TM$  модам (*комплексирование внутри метода*) позволяет значительно повысить информативность метода АМТЗ (что соответствует общепринятой практике) за счет увеличения разрешающей способности двухкритериального оператора инверсии, при сохранении максимальной 100%-ной пространственной детальности параметризации и минимальных потерях информации 5%.

**Выводы**

1. Количество информации о среде, содержащейся в наблюдаемых геофизических полях по Шеннону–Колмогорову, служит количественной мерой информативности геофизического метода или применяемого комплекса методов.
2. Установленная в работе детерминированная функциональная связь между количеством информации о среде и величиной разрешающей способности применяемого метода (или комплекса методов) позволяет с единых теоретико-функциональных и теоретико-информационных позиций оценить достоверность и точность получаемых приближенных решений обратных задач геофизики.

Автор выражает благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований за поддержку работ (гранты № 11-07-00662, 13-05-01135). В работе использовались ресурсы суперкомпьютерного кластера МВС-6000IM МСЦ РАН.

Таблица 1

**Расчетные значения информации  $I(S_{Ne}, E') = N \log r_{max}$  при укрупнении сетки задачи и комплексировании входных признаков**

$\delta_0 = 0,01$	Модель среды	$N$	$r_{max}(N, \delta_0)$	$I(S_{Ne}, E') = N \log r_{max}$	$\Delta I_0$
$TE$	$G_0^{2D}$	434 (100%)	3	688	52%
	$G_{11}^{2D}$	341 (79%)	4	682	53%
	$G_{12}^{2D}$	279 (64%)	8	837	42%
	$G_{13}^{2D}$	269 (62%)	15	1051	27%
$TE \oplus TM$	$G_0^{2D}$	434 (100%)	9	1376	5%

**Ключевые слова:** теория информации, обратные задачи, геоэлектрика, разрешающая способность.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И. Модели и методы магнитотеллурики. – М. : Научный мир, 2009. – 680 с.
2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М. : Наука, 1988. – 552 с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – 4-е изд. – М. : Наука, 1969. – 576 с.
4. Дмитриев В.И. Обратные задачи в геофизики. – М. : МАКС Пресс, 2012. – 340 с.
5. Иванов В.К. О некорректно поставленных задачах // Математический сборник. – 1963. – Т. 61. – № 2. – С. 211-223.
6. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. – М. : Наука, 1980. – 286 с.
7. Колмогоров А.Н.  $\epsilon$ -энтропия и  $\epsilon$ -емкость множеств в функциональных пространствах // Теория информации и теория алгоритмов / А.Н. Колмогоров. – М. : Наука, 1987. – С. 119-198.
8. Колмогоров А.Н. Теория передачи информации // Там же. – С. 29-58.
9. Светов Б.С. Основы геоэлектрики. – М. : ЛКИ, 2008. – 656 с.
10. Стратонович Р.Л. Теория информации. – М. : Сов. Радио, 1975. – 424 с.
11. Тихомиров В.М.  $\epsilon$ -энтропия и  $\epsilon$ -емкость // Теория информации и теория алгоритмов / А.Н. Колмогоров – М. : Наука, 1987. – С. 262-269/
12. Шеннон К.Э. Связь при наличии шума // Работы по теории информации и кибернетике / К.Э. Шеннон – М. : Издательство ИЛ, 1963. – С. 433-460.
13. Шеннон К.Э. Математическая теория связи // Там же. – С. 243-332.
14. Шимелевич М.И., Оборнев Е.А., Оборнев И.Е., Родионов Е.А. Численные методы оценки степени практической устойчивости обратных задач геоэлектрики // Физика Земли. – 2013. – № 3. – С. 58-64.
15. Шимелевич М.И. Методы повышения устойчивости инверсии данных геоэлектрики на основе нейросетевого моделирования // Геофизика. – 2013. – № 3. – С. 49-56.
16. Яглом А.М и Яглом И.М. Вероятность и информация. – М. : Наука, 1973. – 512 с.