

*П.И. Балк, А.С. Долгаль, Т.В. Балк, Л.А. Христенко*

# АПРИОРНАЯ ИНФОРМАЦИЯ О ПОМЕХАХ ИЗМЕРЕНИЙ В КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫХ МОНТАЖНЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ГРАВИТАЦИОННЫХ АНОМАЛИЙ

## Введение

Исполняется 40 лет с момента опубликования статьи В.Н. Страхова и М.И. Лапиной [23], посвященной конечноэлементному монтажному подходу к решению обратных задач гравиразведки, в развитие которого авторы данной статьи, как хотелось бы надеяться, внесли довольно заметный вклад – каждый в той или иной мере. И хотя дата не такая уж «круглая», воспользуемся этим поводом и вспомним работу, значимость которой для создания эффективных технологий извлечения информации из гравиметрических измерений сегодня трудно переоценить, а резервы предложенного в ней подхода еще далеко не исчерпаны. Своим видением перспектив монтажного подхода его автор поделился в работе [22]. Рассуждая о проблемах математической геофизики, В.Н. Страхов отнес задачу углубленного изучения конечноэлементных технологий к двенадцати наиболее актуальным направлениям развития теории интерпретации потенциальных полей. По В.Н. Страхову, проблему становления конечноэлементного подхода следует поставить в один ряд с созданием специализированного искусственного интеллекта и разработкой математической теории некорректных задач, полностью адекватной геофизической практике.

Мы полагаем, что за истекшее после выхода работы [22] время значимость монтажного подхода к конструированию алгоритмов приближенного решения обратных задач гравиразведки только повысилась. Связано это с тем, что в теории интерпретации гравитационных аномалий – не в последнюю очередь благодаря возросшей мощности вычислительных средств – положено начало принципиально новым технологиям извлечения информации из гравиметрических данных, названным аддитивными [9]. Их отличают два признака. Первый признак выражается в том, что в процесс интерпретации вовлекается как можно большее число приближенных решений обратной задачи. Причем, речь идет не о банальной

ссылке на множество  $Q$  допустимых решений обратной задачи, из которого отбирается некое оптимальное; допустимые решения должны быть построены фактически и результат интерпретации обязан зависеть от каждого из них. Вторым признаком состоит в том, что результаты интерпретации выражаются не в терминах наилучшего решения  $S^* \in Q$ , а в виде функций  $\lambda(X)$  распределения одного или нескольких параметров в точках  $X$  геологического пространства [11, 19]. В основу конструкции таких функций положена идея обмена информацией между отдельными допустимыми решениями обратной задачи. Предназначение таких функций – оценить вероятность успешного решения задачи, поставленной перед гравиразведкой, при условии, что планируемые геологоразведочные (в первую очередь – буровые) работы будут проведены в соответствии с рекомендациями, выработанными на основе функций  $\lambda(X)$ . В частности, функция  $\lambda(X)$  может характеризовать вероятность обнаружения возмущающих масс в точках  $X$  изучаемой части пространства.

Де-факто идея аддитивных технологий была впервые опробована еще в работе [1], где за результат интерпретации бралась пара областей  $D_1$  и  $D_2$ , заключающих носитель  $\hat{S}$  возмущающих масс:  $D_2 \subset \hat{S} \subset D_1$ . Предложенный в [1] метод был анонсирован как реализация концепции гарантированного подхода, который, это выяснилось позже, примерно в те же годы начал интенсивно развиваться в теории управления. Гарантированный подход – это лишь частный случай подхода с аддитивными технологиями, с которыми его роднит необходимость работать с широкими подмножествами  $Q_0 \subset Q$  допустимых решений обратной задачи. Отсюда ясно, насколько актуальна проблема поиска методов построения таких подмножеств. На решение этой проблемы мы и ориентируем монтажные алгоритмы. Любопытно, что, благодаря монтажным алгоритмам, проблемы, которые прежде относились к прерогативе информационно-статистического направления

в теории интерпретации, стали доступны и детерминистскому направлению, причем в более широкой постановке, предусматривающей учет разнородной информации об особенностях строения изучаемых геологических тел [8, 9, 10].

Монтажные алгоритмы как нельзя лучше подходят для целей генерации нужного числа допустимых решений обратной задачи [14, 17]. С точки зрения представительности множества  $Q_0$  монтажные алгоритмы интересны тем, что позволяют не просто находить первое попавшееся из допустимых решений, а то из них, что обладает специальными дополнительными свойствами, которых нет у решений, построенных ранее. Что касается формализованных методов решения обратных задач гравиразведки, то альтернативы монтажным методам, похоже, нет. Методы, базирующиеся на модельном классе однородных многогранников, которые, на первый взгляд, могли бы составить конкуренцию, выбывают из игры. Причина заключается не только в необходимости следить за обходом вершин многогранника на каждом итерационном шаге решения условно-экстремальных задач. Если разобраться, то формализация простых априорных ограничений здесь также вызывает большие трудности (например, ограничение на вертикальную мощность многогранника, выраженное в терминах незакрепленных координат его вершин).

Краткий экскурс в историю развития монтажного подхода, предпринятый в настоящей статье, имеет целью не только напомнить о его возможностях, но и выделить первостепенные проблемы, ожидающие своего решения. Безусловно, какие-то из них были ясны едва ли не с момента публикации [23]. К примеру, создание конкурентоспособного программного обеспечения решения сугубо трехмерных задач гравиразведки. Понятна и причина, по которой эта проблема до сих пор не сдвинулась с места – отсутствие финансирования для проведения столь масштабной работы. Держа в уме реальные возможности компьютеров своего времени, до каких-то направлений развития монтажного подхода мысль могла попросту не добраться (прежде всего, это касается усложнения структуры итерационного шага монтажных алгоритмов). Цели, которые ставились перед монтажными алгоритмами в определенный отрезок времени, не обязательно способствовали стимулированию исследований по определенным направлениям (дефицит такого рода разработок отчетливо стал виден, когда перед монтажными алгоритмами была поставлена задача стать рабочим инструментом аддитивных технологий интерпретации).

Но, как обнаружилось, существует целый «пласт» актуальных проблем, для решения которых не было ни объективных, ни субъективных препятствий

и которые, что называется, лежат на поверхности. Речь идет об учете априорных посылок о свойствах помех в измерениях гравитационного поля. Возможно, свою роль здесь сыграло то обстоятельство, что после достигнутого успеха в решении проблемы учета топологических ограничений на носитель источников аномалии дальнейшие обобщения базового метода как бы по инерции пошли по линии обнаружения других типов информации о геометрии возмущающего объекта, которые доступны монтажным алгоритмам.

Как бы то ни было, но факт остается фактом – если в вопросах учета данных о возмущающем объекте и степени сложности итерационного шага современные монтажные алгоритмы ушли далеко вперед, то в вопросе учета свойств помех измерений все осталось как сорок лет назад и ограничивается заданием среднеквадратического уровня аддитивной помехи. Впрочем, рассматривалась постановка обратной задачи, когда в измерениях дополнительно присутствует фоновая компонента, однако подбор поля осуществлялся в той же метрике. Можно, конечно, оспаривать точку зрения, согласно которой даже такого сорта информация – это максимум, что известно на практике (обычно известной считается среднеквадратическая погрешность определения аномалии Буге, характеризующая точность выполненной гравиметрической съемки). И следовательно, в плане учета априорной информации о свойствах помех проблему можно было бы считать закрытой. Однако мы считаем, что технологии интерпретации, претендующие на лидерство, должны удовлетворять «разумным капризам» пользователя. Разработчик программно-математического обеспечения не обязан задумываться, где интерпретатор черпает априорную информацию и какова ее надежность, – надо дать ему возможность реализовать эти предпосылки. Во всяком случае те из них, что встречаются в постановках обратной задачи гравиразведки, которые обслуживаются ранее созданными алгоритмами.

Ввиду особенностей монтажных методов успех в вопросе учета ограничений на параметры носителя масс автоматически не переносится на случай учета ограничений на свойства помех в измерениях гравитационного поля. В статье исследуется возможность монтажного метода в вопросе использования априорной информации об уровне помех – аддитивных и мультипликативных.

#### **Два взгляда на значимость априорной информации в алгоритмах решения обратных задач гравиразведки**

Нет сомнения, что каждый, кто берется за разработку метода интерпретации данных гравираз-

ведки, осознает факт объективного существования множества  $Q$  допустимых решений обратной задачи. Любой элемент множества  $Q$  – как модель изучаемой плотностной среды, удовлетворяющая всей априорной информации, – вправе претендовать, что именно он лучше, чем другие, описывает реальное распределение источников гравитационной аномалии. После того как все ограничения на элементы модели геоплотностных неоднородностей и свойства помех в измерениях поля учтены в постановке обратной задачи, структура множества  $Q$  полностью определена. Значит, и обозначена (пусть и неявно) граница гарантированной точности приближенного решения. Единственный способ повысить эту точность – ввести в постановку задачи дополнительную информацию о модели среды и поля. И в этой связи, казалось бы, все направления в теории интерпретации гравитационных аномалий должны в равной степени оценивать актуальность любых косвенных данных об изучаемых объектах, в том числе и информацию о помехе в анализируемых значениях поля. В реальности же наблюдается различие во взглядах.

Ситуация, когда при любом разумном уже сточении допущений о свойствах помех точность решения все равно будет ограничена, не устраивает сторонников классической теории решения некорректных обратных задач [24], претендующей на гравиразведку как на одну из областей своего применения. Для нее возможность получения результата с заранее заданной точностью (даже только на бумаге) является определяющей. Теория решения некорректных обратных задач нашла выход из положения – довольно странный для прикладных наук, но вполне в духе формальных математических теорий. Если говорить о геофизической проблематике, то состоятельность метода решения обратной задачи предлагается оценивать не по качеству результатов интерпретации, который достигается при имеющемся объеме данных, а в сослагательном наклонении – по тому, какими результаты могли бы быть в виртуальных условиях. Эти условия предполагают, что измерения гравитационного поля выполнены в континуальном множестве точек и норма помехи в измерениях может быть устремлена к нулю. Но и это не все. Поскольку в математике наиболее значимыми признаются результаты, полученные при минимуме предположений, то на протяжении определенного времени данные, без которых и так можно обеспечить виртуальную сходимость последовательности приближенных решений к точному, в постановки задач количественной интерпретации не включались. И лишь тогда, когда прежние, «рафинированные» постановки обратных задач исчерпали себя, стал проявляться интерес к «переопределенным»

постановкам; но, как и можно было ожидать, только при условии, что дополнительные ограничения не выведут задачу в класс корректных (а иначе интерес математиков к ним теряется).

Совершенно иная точка зрения у разработчиков программно-алгоритмического обеспечения для интерпретации данных гравиразведки. Прикладное начало у них преобладает над математическим. Здесь, прежде всего, исходят из реалий: дискретности гравиметрических измерений и статического характера помехи, когда не только невозможно управлять ее нормой, но и само истинное значение уровня помех известно лишь приближенно. Средне-квадратическая погрешность определения аномалий Буге, как известно, включает в себя инструментально определенные погрешности наблюдаемых значений силы тяжести и зависит от точности определения высот и координат пунктов гравиметрических наблюдений. Однако за ее рамками остается влияние переменной плотности горных пород верхней части геологического разреза (т.н. промежуточного слоя), а также влияние всех допущений и упрощений, использованных при построении стартовой физико-геологической модели изучаемого объема среды. Кроме того, экспериментальная информация показывает, что высокочастотные геологические помехи, осложняющие аномалии силы тяжести, нередко имеют фрактальный характер.

Многозначность выбора решения обратной задачи воспринимается как объективная данность, а основные резервы повышения качества результатов интерпретации связываются с сужением множества  $Q$  за счет дополнительных априорных ограничений, в том числе и на свойства помех в редуцированных значениях гравитационного поля. В практике интерпретации гравитационных аномалий термин «переопределенная постановка обратной задачи» лишен здравого смысла – любую информацию, способную сузить множество  $Q$ , необходимо использовать (неважно, если виртуальную сходимость можно было обеспечить и без нее). На практике одним из основных критериев состоятельности метода решения обратной задачи становится его способность к одновременному учету разнообразных априорных ограничений. Если метод не в состоянии охватить какую-то часть информации, трудно будет обосновать наилучший выбор решения из  $Q$ , какой бы критерий оптимальности при этом ни использовался.

Отмеченное обстоятельство заставило авторов статьи – каждого в свое время – обратить более пристальное внимание на монтажный подход В.Н. Страхова [23] к решению обратной задачи гравиразведки рудного типа. Названный подход был реализован в виде алгоритма регулируемой направленной

кристаллизации (РНК) для оценки однородного возмущающего объекта  $\hat{S}$  известной плотности  $\hat{\delta} > 0$  по измерениям  $\Delta\tilde{g}(x_j), j = 1, 2, \dots, m$ , гравитационного поля с аддитивными помехами  $\xi_j$ , среднеквадратическое значение  $\varepsilon = (m^{-1}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_m^2))^{1/2}$  которых предположительно не превосходит данное  $\varepsilon_0$  [23].

**История развития и современное состояние монтажного подхода**

Центральная идея, которая лежит в основе монтажного подхода, заключается в обеспечении единства сеточного (конечноэлементного) описания некоторой части  $S$  пространства, заведомо содержащей в себе источник аномалии  $\hat{S}$ , и специализированного, учитывающего потенциальность гравитационного поля метода минимизации невязки при построении допустимого решения  $\Omega^*$  в виде объединения определенного числа элементов сеточного покрытия области  $S$ . Скажем, что система  $T = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  замкнутых тел простой геометрической формы, конгруэнтных некоторому телу  $\omega$ , образует замощение области  $S$ , если объединение всех элементов  $\omega_i, i = 1, 2, \dots, n$ , содержит  $S$  как свое подмножество, а общими у любых двух множеств  $\omega_r$  и  $\omega_s$  могут быть разве что граничные точки. Размеры элемента  $\omega$  задает интерпретатор. Вслед за В.Н. Страховым назовем связанное объединение  $\Omega$  любого числа элементов замощения  $\omega_i \in T$  конфигурацией, множество  $Я(\Omega)$  этих элементов – ядром конфигурации  $\Omega$ , а множество  $O(\Omega)$  элементов  $\omega_i \in T$ , не принадлежащих множеству  $Я(\Omega)$ , но граничащих хотя бы с одним из его элементов – оболочкой конфигурации  $\Omega$ . В свою очередь, ядро  $Я(\Omega)$  разбивается на подмножество  $\Gamma(\Omega)$  элементов ядра  $Я(\Omega)$ , граничащих хотя бы с одним элементом оболочки  $O(\Omega)$ , – назовем его границей ядра  $Я(\Omega)$ , и подмножество  $B(\Omega)$  элементов из  $Я(\Omega)$ , не граничащих с элементами оболочки  $O(\Omega)$ , – назовем его внутренностью ядра  $Я(\Omega)$  (рис. 1). Система  $A$  всевозможных конфигураций  $\Omega_k$ , определенных на заданном замощении  $T$ , служит в монтажном подходе модельным классом носителей возмущающих масс.

Итерационный метод РНК, если его рассматривать как метод решения условно-экстремальной задачи, начинается с того, что известная плотность  $\hat{\delta} > 0$  переводится в число оптимизируемых параметров (что уже является достаточно революционным шагом для классических методов оптимизации), а за начальное приближение  $\Omega_0^*$  к  $\Omega^*$  берется отдельный элемент замощения  $\omega_{i(0)} \in T$  – центр кристаллизации, предположительно удовлетворяющий включению  $\omega_{i(0)} \subset \hat{S}$  (теперь уже неожиданный ход для практики разработки алгоритмов решения обратных задач гравиразведки, где считается, что

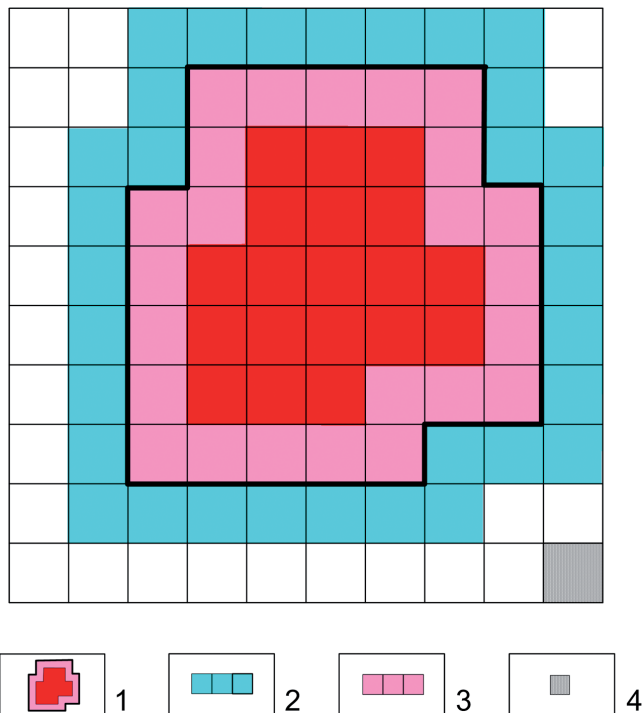


Рис. 1. Сеточное описание 2D геологического пространства: 1 – конфигурация  $\Omega$ ;  $Я(\Omega) = B(\Omega) \cup \Gamma(\Omega)$ ; 2 – элементы оболочки  $O(\Omega)$ ; 3 – элементы границы  $\Gamma(\Omega)$ ; 4 – элемент замощения  $\omega$

нулевое приближение должно быть соизмеримо с оцениваемым объектом).

На очередной итерации  $t \geq 1$  алгоритма РНК выполняются следующие построения: 1) для каждого элемента замощения  $\omega_i \in O(\Omega_{t-1}^*)$  создается пробная конфигурация  $\Omega_{t,i}$  с ядром  $Я(\Omega_{t-1}^*) \cup \{\omega_i\}$ ; 2) для каждой конфигурации  $\Omega_{t,i}$  из решения линейного алгебраического уравнения определяется плотность  $\delta = \delta_{t,i}$ , при которой достигается минимум  $\varepsilon_{t,i}$  среднеквадратической невязки

$$\Phi_0(\delta) = \left( \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\Delta\tilde{g}(X_j) - \Delta g(\Omega_{t,i}, \delta; X_j))^2 \right)^{1/2} \quad (1)$$

наблюденного поля  $\Delta\tilde{g}$  и поля  $\Delta g$ , создаваемого распределением  $\langle \Omega_{t,i}, \delta \rangle$  масс плотности  $\delta$ , распределенных по носителю  $\Omega_{t,i}$ ; 3) устанавливается индекс  $i$  (обозначим его как  $i(t)$ ), при котором было достигнуто наименьшее значение  $\varepsilon_{t,i}$  (обозначим  $\varepsilon_{t,i(t)}$  как  $\varepsilon_t^*$ , а  $\delta_{t,i(t)}$  как  $\delta_t^*$ ); 4) в качестве текущего приближения  $\Omega_t^*$  к решению  $\Omega^*$  берется конфигурация  $\Omega_{t,i(t)}$ . Процесс РНК завершается, как только на некотором  $t$  выполнится неравенство  $\delta_t^* \leq \hat{\delta}$  (это третья позиция, по которой метод РНК демонстрирует свою оригинальность – итерационный процесс завершается не по критерию невязки, что логично было ожидать, а по критерию выхода в окрестность истинного значения избыточной плотности). Если также

выполняется неравенство  $\varepsilon_t^* \leq \varepsilon_0$ , где  $\varepsilon_0$  – максимально допустимое значение невязки, то конфигурация  $\Omega_{t,i(t)}$  принимается за приближенное решение  $\Omega^*$  обратной задачи.

Для лучшего восприятия метода РНК есть смысл уже сейчас познакомить читателя с работой метода на примере, которым воспользуемся впоследствии при опробовании новых версий монтажного метода, различающихся функционалами Фг близости исходного («наблюденного») и модельного полей. В рассматриваемом примере в роли носителя масс плотности  $\delta = 0,3 \text{ г/см}^3$  взята бесконечнопротяженная горизонтальная призма, сечением которой (вкrest простирания) служит конфигурация  $\tilde{\Omega}$  мощности  $|\mathcal{Y}(\tilde{\Omega})| = 88$ , построенная из квадратных элементов замощения  $\omega_i$  со стороной 25 м. Приближенные («измеренные») значения  $\Delta\tilde{g}_j = \Delta\tilde{g}(x_j)$  аномалии  $\Delta g$  заданы на профиле в  $m = 36$  точках  $x_j = 50(j - 1)$  м и отягощены помехой  $\xi$ , имеющей достаточно близкое к нулю среднее и среднеквадратическое значение которое приблизительно равно 0,015 мГал (рис. 2). Помеха сконструирована путем усреднения (с помощью скользящего окна) последовательности значений нормально распределенной случайной величины («ширина» окна – 5 точек). Априори предполагается, что область  $\tilde{S}$  является односвязной и достаточно гладкой, ее мощность не превосходит 1 км по латерали и 0,5 км по вертикали, а глубина погружения

ее нижней кромки не превосходит 1 км. На рис. 3 представлены графики поведения невязки и оптимизируемой плотности с ростом номера  $t$  итерации, а на рис. 4 приведены несколько промежуточных приближений  $\Omega_r^*$ , включая решение  $\Omega^*$ .

Выделим основные особенности метода РНК. Даже при том, что в методе использовано лишь предположение о связности носителя  $\tilde{S}$  (которое, кстати, здесь выполняется автоматически), в нем явно просматриваются перспективы монтажных технологий. В главном они связаны со способностью к радикальной декомпозиции процедуры учета имеющейся информации о геометрических особенностях модели источников поля и отсутствии жестких требований к способам ее формализации. Этим не могут похвастаться алгоритмы решения обратных задач гравиразведки, построенные на методах математического программирования – некоторые типы информации (к примеру, имеющие топологический характер) не легко «уложить» в «прокрустово ложе» стандартных ограничений типа линейных неравенств, связывающих оцениваемые параметры модели источников аномалии (вспомним известные работы 60-70-х годов). При формировании множества пробных конфигураций  $\Omega_{t,i}$  учет ограничений на модель источников поля сводится в монтажных алгоритмах к прямой проверке соблюдения каждого из них в отдельности. Если начальное приближение  $\Omega_0^*$  обладает свойством, приписанным итоговому решению  $\Omega^*$  каким-то из заданных ограничений, то в последующем понадобится лишь следить за наследованием конфигурацией  $\Omega_{t,i}$  соответствующего свойства конфигурации  $\Omega_{t-1}^*$ . Это может даже оказаться значительно проще, чем прямая проверка наличия этого свойства у конфигурации  $\Omega_{t,i}$ . Поскольку в методе РНК начальное приближение  $\Omega_0^*$  суть отдельный элемент замощения, то оно, конечно, связно, односвязно, не содержит бессодержательных фрагментов, заведомо удовлетворяет ограничениям на максимально допустимую протяженность по всем направлениям. Так ответ на вопрос, перенимает ли конфигурация  $\Omega \cup \omega$  односвязность конфигурации  $\Omega$ , содержится уже в пересечении  $O(\omega) \cap \Gamma(\Omega)$ .

К методу РНК трудно приложить привычное понятие размерности решаемой условно-экстремальной задачи. Но если под размерностью понимать число  $|O(\Omega_{t-1}^*)|$  элементов замощения, участвующих в формировании очередного приближения  $\Omega_r^*$ , то выходит, что она переменная (опять же, ситуация, не встречающаяся в известных методах решения обратной задачи гравиразведки). Известное «проклятие размерности», которое по Р. Беллману висит над всеми многоэкстремальными задачами, в случае алгоритма РНК ощущается довольно слабо.

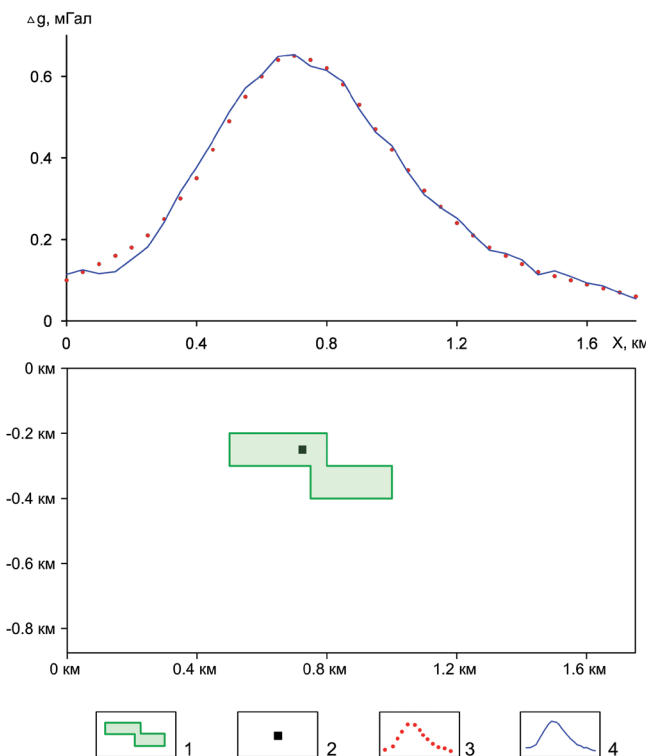


Рис. 2. Геоплотностная модель: 1 – аномалиеобразующая призма; 2 – центр кристаллизации; 3 – точное поле  $\Delta g$ ; 4 – заданное поле  $\Delta\tilde{g}$

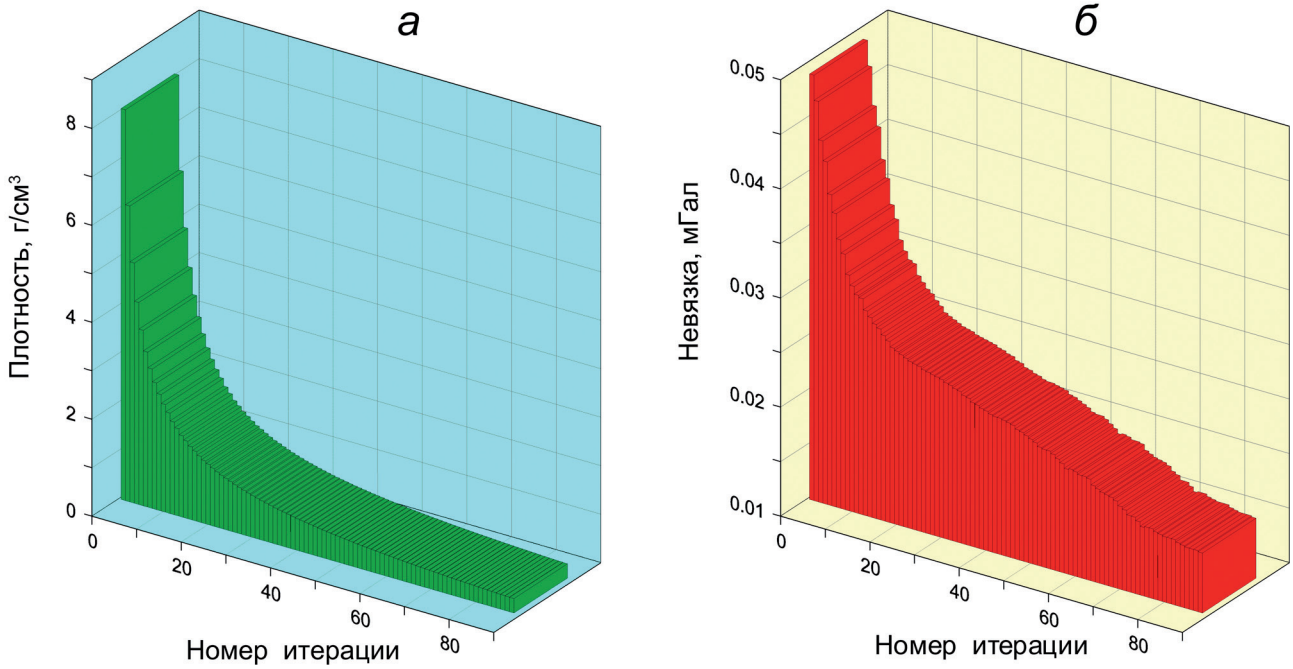


Рис. 3. Графики поведения невязки  $\epsilon_t^*$  и плотности  $\bar{\sigma}_t^*$  масс, распределенных по конфигурации  $\Omega_t^*$ , полученные при решении обратной задачи гравиразведки методом РНК

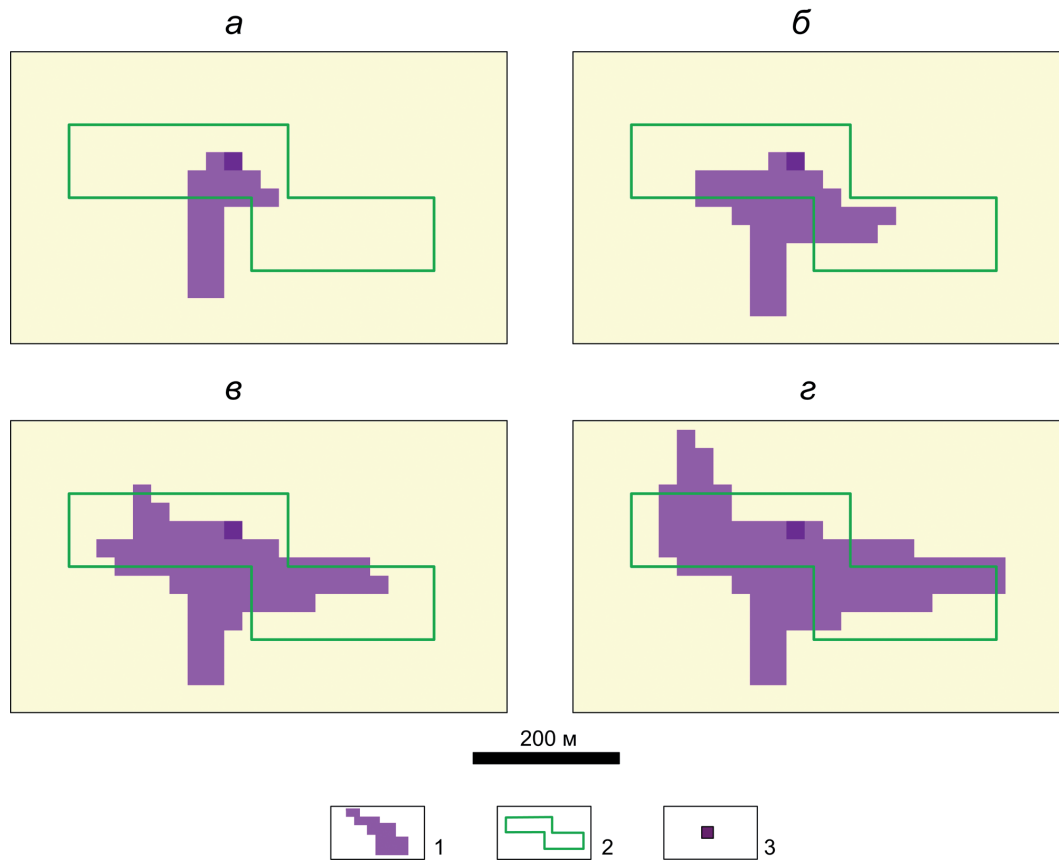


Рис. 4. Характеристики текущих приближений к решению обратной задачи методом РНК: а –  $t = 20$  итераций ( $\bar{\sigma}_{20}^* = 1,248$  г/см<sup>3</sup>;  $\epsilon_{20}^* = 0,026$  мГал); б –  $t = 40$  итераций ( $\bar{\sigma}_{40}^* = 0,656$  г/см<sup>3</sup>;  $\epsilon_{40}^* = 0,023$  мГал); в –  $t = 60$  итераций ( $\bar{\sigma}_{60}^* = 0,439$  г/см<sup>3</sup>;  $\epsilon_{60}^* = 0,020$  мГал); г – результат интерпретации, 88 итераций ( $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{88}^* = 0,298$  г/см<sup>3</sup>;  $\epsilon^* = \epsilon_{88}^* = 0,016$  мГал).  
1 – подобранная модель; 2 – аномалиеобразующая призма; 3 – центр кристаллизации

В аддитивных технологиях требования, которые предъявляются к методу РНК, заметно отличаются от тех, что предъявляются к алгоритмам условной минимизации при решении обратных задач гравиразведки в рамках обычного подхода. Если в вопросе полноты учета априорной информации методу РНК (как и любому другому альтернативному алгоритму) не может быть никаких поправок, то требования к величине невязки, которая будет достигнута с помощью метода РНК, уже довольно слабые. Поясним это на примере задачи построения областей  $D_1$  и  $D_2$ , обеспечивающих включение  $D_1 \subset \hat{S} \subset D_2$ . Эти области конструируются из элементов замощения  $\omega_i$ . Идентификация каждого из экзаменуемых элементов  $\omega_i$  на предмет включения в ядра  $Y(D_1)$  и  $Y(D_2)$  – это вопрос о том, содержит ли множество  $Q$  хотя бы одно допустимое решение  $\Omega_r$  обратной задачи, ядру которого принадлежит (в случае  $D_1$ ) или не принадлежит (в случае  $D_2$ ) этот элемент. Обозначим как  $\varepsilon^{(min)}$  минимальное значение невязки, которое достигается на конфигурационных носителях из множества  $Q$ , и пусть, как прежде,  $\varepsilon_0$  – допустимое значение невязки, а  $\varepsilon^*$  – значение невязки, которое удалось достигнуть с помощью метода РНК. Если  $\varepsilon_0 > \varepsilon^{(min)}$  и допустимые решения, ядра которых содержат экзаменуемый элемент  $\omega_i$ , существуют, то для верной идентификации достаточно лишь, чтобы выполнялось включение  $\varepsilon^* \in (\varepsilon^{(min)}, \varepsilon_0)$ . Парадокс состоит в том, что  $\varepsilon$ -эквивалентность, которая в обычной ситуации является негативным фактором, здесь выступает как союзник и будет лишь способствовать выполнению этого включения. Сложнее, если искомым допустимых решений не существует. Тогда при выполнении неравенства  $\varepsilon^* > \varepsilon_0$  остается опасение, что алгоритм «не дотянул» до максимально допустимой невязки. Мы не будем останавливаться на отдельных приемах, которые позволяют снизить риск неверной идентификации.

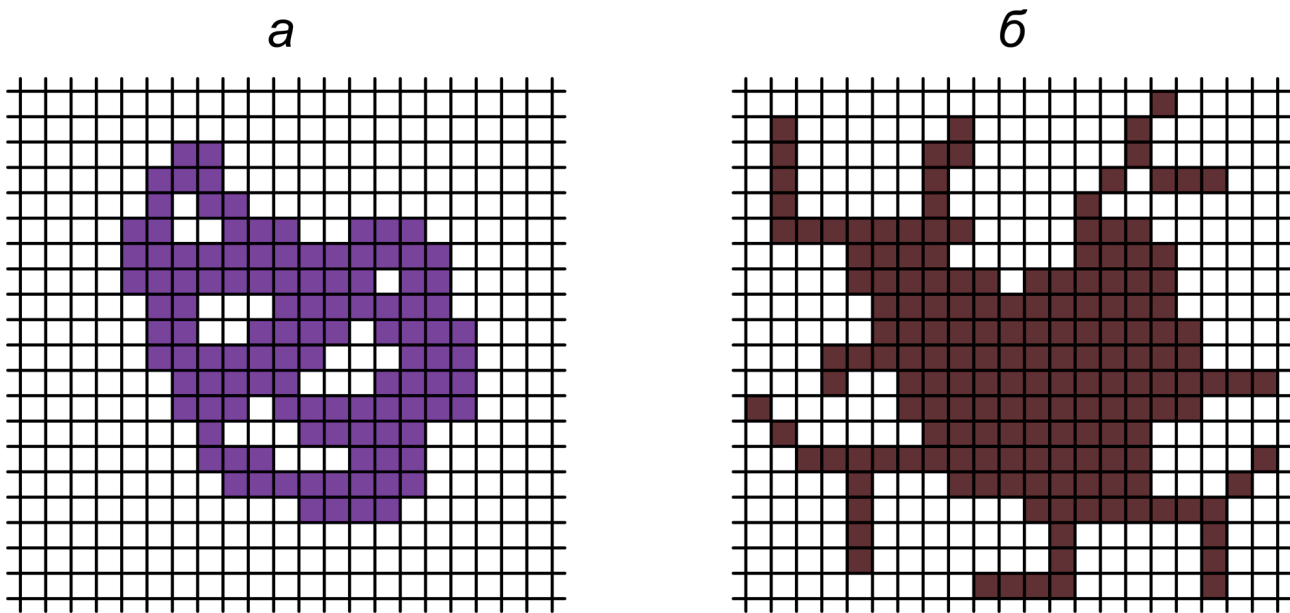
Начало углубленному изучению возможностей монтажного подхода сверх тех, которыми обладает метод РНК, положили алгоритмы идентификации топологических особенностей конфигурационных приближений к решению обратной задачи. Метод РНК не гарантирует односвязность конфигурации  $\Omega^*$  – отсутствие в ней «дыр» (рис. 5а). Задачи идентификации произвольных объединений конечного числа элементов замощения на предмет связности и односвязности и эффективные алгоритмы их дополнения до конфигураций с необходимыми топологическими свойствами рассмотрены в [2]. Метод РНК не гарантирует и достаточную гладкость решения  $\Omega^*$ , без которой оно может оказаться геологически малосодержательным. В работе [2] введен в рассмотрение признак гладкости конфигурации  $\Omega$ ,

выраженный в терминах, так называемых, «отростков» – бессодержательных фрагментов границы  $\Gamma(\Omega)$  в виде «ветвящихся цепочек», составленных из отдельных элементов замощения (рис. 5б). Предложен алгоритм, препятствующий возникновению подобных отростков у текущих приближений  $\Omega^*$ . В этой связи отметим исследования У. Шефера [25], в которых для обеспечения гладкости решения  $\Omega^*$  в минимизируемый функционал вводится специальное слагаемое по типу тех, что используются при решении обратных задач методами регуляризации [24]. Дифференцированный подход к проблеме гладкости, выбранный в [2], представляется нам предпочтительней, чем использование обычных интегральных характеристик, когда часть решения может оказаться «недоглаженной», часть «переглаженной», хотя в среднем будет все хорошо.

Если воспользоваться определением «отростка» и его длины  $L$ , данным в [2], то в качестве ограничения на гладкость построенной конфигурации  $\Omega^*$  можно потребовать, чтобы максимальная длина  $L_{max}$  встречающихся отростков конфигурации  $\Omega^*$  не превышала заданного  $L_0$ . Ничто не мешает совмещать ограничение на гладкость отдельных фрагментов решения  $\Omega^*$  с интегральным признаком гладкости. В качестве такового может служить отношение  $\nu(\Omega^*)$  числа элементов, входящих в оболочку  $O(\Omega^*)$  конфигурации  $\Omega^*$ , к числу элементов, входящих в ядро  $Y(\Omega^*)$ . Назовем это отношение индексом компактности конфигурации (рис. 5).

Учет типичной информации, такой, как ограничения на протяженность объекта  $\hat{S}$  по вертикали и латерали, равно как и ограничения на его пространственное положение, имеющие характер включения  $S_1 \subset \hat{S} \subset S_2$ , для монтажных технологий не представляет особой проблемы. Пусть в постановке обратной задачи фигурирует более общее, чем предусмотрено базовым методом РНК, нулевое приближение  $\Omega^*_0$  в виде связной конфигурации, которая предположительно принадлежит истинному носителю масс. Для обеспечения названного включения необходимо просто-напросто, чтобы: 1) нулевое приближение удовлетворяло включению  $S_1 \subset \Omega^*_0$  (а если это не произошло, то первые итерации посвятить направленному наращиванию текущих приближений  $\Omega^*_t$  с тем, чтобы добиться включения  $S_1 \subset \Omega^*_t$ ); 2) на каждой итерации  $t > 1$  существовал запрет на внесение элементов замощения  $\omega_i \notin S_2$  в ядра текущих приближений  $\Omega^*_t$ .

Поговорим сейчас о тех направлениях развития монтажного подхода, которые связаны с обобщением структуры его итерационного шага. Конечно, если алгоритм РНК выходит на допустимое решение обратной задачи, то никаких претензий к нему быть


 Рис. 5. Топологические особенности конфигураций  $\Omega$ :

 а – неодносвязная безотростковая конфигурация ( $\nu(\Omega) = 0,56$ );

 б – односвязная конфигурация, длина отростков в которой не превосходит  $L_{max} = 11(\nu(\Omega) = 1,02)$ 

не может. Но в спорных ситуациях, к методу РНК сразу возникает один вопрос. Суть в том, что у этого метода есть одно досадное свойство: элемент замощения  $\omega_p$ , однажды причисленный к элементам ядра текущего приближения  $\Omega_p^*$ , неминуемо попадает и в ядро итоговой конфигурации  $\Omega^*$ . Претензии могли бы быть сняты, если бы при более сложной структуре итерационного шага алгоритм мог выводить какие-то элементы замощения из ядер текущих приближений. Конечно, над подобного рода усовершенствованиями монтажных алгоритмов довлеет одно обстоятельство: эти алгоритмы не принадлежат к классу так называемых «жадных алгоритмов»: сиюминутный успех может обернуться заметными суммарными потерями. В нашем случае это означает, что стоило взять на некоторой итерации  $t$  не самое оптимальное по невязке приближение  $\Omega_p^*$ , как итоговая невязка подбора оказалась бы меньше. В каких-то случаях это может стать решающим в вопросе о том, считать или нет конфигурацию  $\Omega^*$  допустимым вариантом интерпретации.

Невозможно определить, когда стоит поступить не самым (локально) оптимальным способом. Но общая тенденция ясна: не помешало бы усложнить структуру итерационного шага. По меньшей мере, дать методу шанс исправлять свои промахи за счет исключения отдельных элементов замощения из ядра  $\mathcal{Y}(\Omega_p^*)$ , включение которых в ядра предшествующих приближений было оправдано тем самым сиюминутным успехом. Самый простой принцип заложен в алгоритм регулируемой направленной перекристаллизации (РНП) [14], когда очередное

приближение  $\Omega_t^*$  образуется из предшествующего в результате перебора всех пробных вариантов обмена между оболочкой  $O(\Omega_{t-1}^*)$  и границей  $\Gamma(\Omega_{t-1}^*)$  не более, чем по одному элементу замощения с каждой стороны. Оборот «не более» подчеркивает, что, как частный случай, отдельные итерации метода могут копировать шаг алгоритма РНК или алгоритма регулируемой направленной раскристаллизации (РНР) [19]. В последнем случае ядро  $\mathcal{Y}(\Omega_t^*)$  образуется в результате изъятия из ядра  $\mathcal{Y}(\Omega_{t-1}^*)$  одного из элементов  $\omega_i \in \Gamma(\Omega_{t-1}^*)$ , а начальное приближение заведомо удовлетворяет включению  $\hat{S} \subset \Omega_0^*$ . Более сложная структура итерационного шага  $t$ , когда между множествами  $O(\Omega_{t-1}^*)$  и  $\mathcal{Y}(\Omega_{t-1}^*)$  происходит обмен произвольным числом элементов замощения, технологически неподъемна. Правда есть одна – назовем ее пока потенциальной – возможность [4] – комбинировать монтажный подход с методами математического программирования. Идея заключается в том, чтобы, как и в базовом алгоритме РНК, наращивать на каждом шаге  $t$  ядро предшествующего приближения  $\Omega_{t-1}^*$ , но сразу на некоторое число элементов оболочки  $O(\Omega_{t-1}^*)$ . Сколько элементов из оболочки  $O(\Omega_{t-1}^*)$  и какие именно перейдут в ядро  $\mathcal{Y}(\Omega_{t-1}^*)$  – это будет установлено с помощью математического программирования. Вопрос о том, как обеспечить при этом наследование свойства односвязности конфигурации, хотя и рассматривался в [4], требует дальнейшего изучения. Но и здесь есть выход. Вначале комбинированный (с методом математического программирования) алгоритм решения обратной задачи реализуется без оглядки на односвязность.



Далее с помощью алгоритма из [2] построенная конфигурация  $\Omega^*$  идентифицируется на предмет односвязности. Скорее всего, она таковой являться не будет, но вместе с тем не будет и содержать большое число «дыр». С помощью другой процедуры из [2], рассчитанной на любые проявления неодносвязности, конфигурация дополняется до односвязной. Последняя принимается за нулевое приближение  $\Omega_0^*$  и, если оно не удовлетворяет ограничению на невязку, к нему применяется алгоритм РНР [18].

Обратимся теперь к возможным обобщениям алгоритма РНК, уже связанным с усложнением модели источников аномалии. Естественно, что первое желание – расширить возможности монтажных технологий за счет обратных задач, в которых аномалия создается не одним локальным телом, а совокупностью конечного числа однородных тел  $S_r$  различной плотности  $\delta_r$ . Если допускается контактирование соседних тел, возникает обмен элементами замощения между границами соседних тел. В работе [2] дан способ, позволяющий подбираемым плотностям  $\delta_r^*$  одновременно выходить в малые окрестности истинных значений  $\hat{\delta}_r$ . При этом на каждом шаге  $(t, i)$  вычисление плотностей  $\delta_{r,i}^*$  тел  $\Omega_{r,i}^*$  минимизирующих невязку, все также сводится к решению линейного уравнения.

Еще одним направлением расширения возможностей монтажного подхода являются смешанные обратные задачи. В [13] рассматривается ситуация, когда совместной оценке подлежат как геометрические, так и плотностные характеристики модели источников аномалии. В работе [6] предложен монтажный алгоритм решения структурно-рудной обратной задачи гравиметрии. Как показали первые исследования, еще в одном классе смешанных обратных задач – совместная интерпретация данных различных геофизических методов (гравиразведка, магниторазведка) – монтажный подход также может найти применение [7].

Наконец, отметим, что идея монтажного подхода не обязательно предполагает операции с неким регулярным замощением. В этом смысле напомним о работах украинских геофизиков [16, 20] по обратной задаче «рудного» типа, а также о предложенном в [15] методе решения обратной задачи гравиразведки для контактной границы. Результаты его опробования на данных гравиметрической съемки подкрепили гипотезу о происхождении некоторых впадин Байкальской рифтовой зоны. Вообще, явно или нет, но монтажный подход присутствует во всех тех алгоритмах решения обратной задачи гравиразведки, в которых определяющей является идея структурированных итерационных процессов геофизически объяснимой и оправданной локальной деформации

очередного приближения к оцениваемому носителю масс с целью поиска одного из допустимых вариантов интерпретации. К таким алгоритмам авторы причислили бы и известный метод локальных поправок.

### Обновление монтажных алгоритмов по линии расширения типов используемой априорной информации о свойствах помех

Может показаться, что роль скоро проблемы учета априорных ограничений на геометрию возмущающих тел для монтажных методов не существует, то включение в постановку задачи информации о свойствах помех в измерениях поля пройдет также гладко. Но построить нулевое приближение, отвечающее требованиям к геометрии носителя, а затем просто контролировать, чтобы очередное приближение наследовало свойства предыдущего, не сложно, чего не скажешь об ограничениях на уровень помех в измерениях аномалии – о допустимости полученного значения невязки мы узнаем лишь по завершении итерационного процесса.

Особенности алгоритма РНК обязывают быть осторожными в стремлении автоматически перенести его возможности на, казалось бы, схожую ситуацию. И это наглядно демонстрирует представленные ниже результаты. Возвратим плотности  $\hat{\delta}$  статус закрепленного параметра и вернемся к критерию останова по невязке. Легко догадаться, что до какой-то итерации невязка будет уменьшаться (хотя и не строго монотонно), а затем – примерно когда текущие модельные распределения  $\langle \Omega_p^*, \hat{\delta} \rangle$  выйдут на значение массы  $\hat{M}$  возмущающего объекта – начнется ее рост. Носитель  $\Omega_p^*$ , отвечающий итерации  $t$ , на которой достигнуто наименьшее значение невязки  $\varepsilon_p^*$ , примем за искомое приближенное решение  $\Omega^*$ . Казалось бы, число оптимизируемых переменных уменьшилось на одну и на невязке  $\varepsilon^*$  это должно сказаться благотворно. Вычислительный эксперимент показал, однако, не то, что ожидалось: при ограничениях на гладкость носителя, которых методу РНК вполне хватало для построения геологически содержательного допустимого решения обратной задачи, мы получаем теперь абсолютно бессмысленную конфигурацию  $\Omega^*$ . Если за счет крайне жестких ограничений все же заставить приближения  $\Omega_t^*$  не выходить за «рамки дозволенного», то наблюдается хаотичное поведение невязки  $\varepsilon_p^*$ , а ее окончательное значение  $\varepsilon^*$  заметно превышает то, на которое выходит алгоритм РНК. Отчасти такое объяснимо: ведь мы вернулись к традиционной конструкции алгоритмов автоматизированного подбора, при которой начальные приближение  $\Omega_0^*$  и значение невязки  $\varepsilon_0^*$  играют решающую роль, а попытка исправить положение ни к чему хорошему привести уже не может.

Результаты описанного эксперимента обязывают считать содержание данного раздела статьи всего лишь неким «протоколом о намерениях» – намерениях распространить монтажный принцип на новые постановки обратных задач гравиразведки, в которых фигурировали бы иные, чем (1), функционалы близости подбора наблюдаемого поля. Реалистичность этих намерений должен подтвердить или опровергнуть вычислительный эксперимент.

Среди постановок обратных задач гравиразведки, в которых наиболее часто встречается отличная от суммы квадратов невязок функция близости наблюдений  $\Delta\tilde{g}(X_j), j = 1, 2, \dots, m$ , и значений  $\Delta g^*(X_j) = \Delta g(S^*, \delta; X_j)$  поля тела  $S^*$  плотности  $\delta$ , безусловно, является сумма модулей невязок. При обобщении базового метода РНК на случай октаэдрической нормы вектора уклонений двух полей на шаге  $(t, i)$  для всех пробных вариантов  $\Omega_{t,i}^*$  перехода от  $\Omega_{t-1}^*$  к  $\Omega_t^*$  возникает задача минимизации выпуклой кусочно-линейной функции

$$\Phi_1(\delta) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |\Delta\tilde{g}(X_j) - \Delta g(\Omega_{t,i}^*, \delta; X_j)|. \quad (2)$$

За счет введения дополнительных переменных подобные задачи сводятся к задаче линейного программирования. В нашем случае, когда на пробном шаге  $(t, i)$  приходится иметь дело лишь с одной оптимизируемой переменной – плотностью  $\delta_{t,i}^*$ , все резко упрощается. В принципиальном плане эта обнадеживающая деталь второстепенна. Сам по себе эффективный алгоритм минимизации невязки на каждом отдельном шаге итерационного монтажного метода еще ни о чем не говорит. Поэтому не будем предвосхищать события и дождемся результатов вычислительного эксперимента, а в этом разделе статьи упор сделаем на формулировки новых постановок задачи.

Следующей логично будет опробовать последнюю из триады метрик, наиболее часто встречающихся при решении многих практических задач. Предположим, что интерпретатор располагает оценкой максимально возможного значения  $\varepsilon_0$  помехи  $\xi_j$  в каждой точке измерения  $X_j$ . Следуя общей логике построения монтажных алгоритмов, на пробном шаге  $(t, i)$  необходимо ставить задачу минимизации функционала

$$\Phi_2(\delta) = \max_{j=1, 2, \dots, m} |\Delta\tilde{g}(X_j) - \Delta g(\Omega_{t,i}^*, \delta; X_j)|, \quad (3)$$

В стремлении максимально приблизить поле подобранного распределения масс к истинному в теории интерпретации гравитационных аномалий временами выдвигается идея использования в структуре минимизируемого функционала каких-то

весовых коэффициентов. Считается, что она выглядит довольно обоснованно в тех случаях, когда измерения заведомо не равноточны. Мы же видим во введении весов возможность движения к решению обратной задачи  $\Omega^*$  по еще одной «траектории», которая может оказаться наиболее удачной с точки зрения минимизации невязки в одной из метрик. Речь идет о минимизации на каждом пробном шаге  $(t, i)$  функционала

$$\Phi_3(\delta) = \left( \sum_{j=1}^m p_j (\Delta\tilde{g}(X_j) - \Delta g(\Omega_{t,i}^*, \delta; X_j))^2 \right)^{1/2} \quad (4)$$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1, (p_j > 0).$$

Понятно, что вместо взвешенного квадратичного функционала (4) может быть заявлена взвешенная сумма модулей невязок в отдельных точках измерения.

Если говорить об отношении к эффективности такого подхода, то здесь не обойтись без вопросов. Прежде всего, не будем забывать, что речь идет о сближении с полем  $\Delta\tilde{g}$ , а не с точно заданным полем  $\Delta\hat{g}$ . Если бы функционал (4) гарантированно позволял модельному полю стать ближе к истинному, чем в случае использования других функционалов, то и тогда мы напомним бы об отсутствии монотонной зависимости точности решения обратной задачи от меры этой близости. Стоит сослаться на работу [3], где приведены неожиданные примеры, опровергающие сложившиеся стереотипы о гарантированном преимуществе одних моделей интерпретируемого поля над другими.

Как бы ни было, не обойти вопрос о том, по какому принципу выбирать веса  $p_j$ . Самое простое брать фиксированные веса, задаваемые геофизиком-интерпретатором. На наш взгляд, если уж применять конструкцию с весовыми коэффициентами, стремясь максимально приблизиться к наблюдаемому полю, то пусть эти коэффициенты будут «плавающими» – меняющимися по ходу итерационного процесса в соответствии с достигнутыми за предыдущие итерации локальными невязками в точках  $X_j$ . Можно предложить две модификации такого подхода. В первой из них на каждой итерации  $t$  берутся веса  $p_j^{(t)}$ , рекомендованные по результатам приближения полей  $\Delta\tilde{g}(X)$  и  $\Delta g(\Omega_{t-1}^*, \delta_{t-1}^*; X)$  на предыдущей итерации  $t - 1$ :

$$p_j^{(t)} = \frac{|\Delta\tilde{g}(X_j) - \Delta g(\Omega_{t-1}^*, \delta_{t-1}^*; X_j)|}{\sum_{r=1}^m |\Delta\tilde{g}(X_r) - \Delta g(\Omega_{t-1}^*, \delta_{t-1}^*; X_r)|}. \quad (5)$$

Во второй модификации уже на каждом пробном шаге  $(t, i)$  в точках  $X_j$  вычисляются невязки, доставляемые массами, распределенными по носителю  $\Omega_{t,i}$  с плотностью  $\delta_{t,i}$ , минимизирующей невязку, и вычисляются веса.

$$p_j^{(t,i)} = \frac{|\Delta\tilde{g}(X_j) - \Delta g(\Omega_{t,i}; \delta_t^*; X_j)|}{\sum_r |\Delta\tilde{g}(X_r) - \Delta g(\Omega_{t,i}; \delta_t^*; X_r)|}. \quad (6)$$

К идее применения весовых коэффициентов в структуре минимизируемого функционала примыкает идея использования предварительного логарифмирования отношения подбираемого и наблюдаемого гравитационных полей в точках задания последнего:

$$\Phi_4(\delta) = \left( \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left[ \ln \left| \frac{\Delta g(\Omega_{t,i}, \delta; X_j)}{\Delta\tilde{g}(X_j)} \right| \right]^2 \right)^{1/2}. \quad (7)$$

В ряде случаев это может упростить структуру функционала (уменьшив его овражность) и облегчить процесс минимизации.

В.Н. Страхов неоднократно ставил вопрос об актуальности создания методов решения обратных задач гравиразведки при мультипликативной помехе в измерениях. Проверим, можно ли распространить принцип структурирования алгоритма РНК на ситуацию, когда в среднем помеха измерения пропорциональна измеряемому значению поля и интерпретатор может задать такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что

$$1 - \varepsilon_0 \leq \frac{\Delta g^*(X_j)}{\Delta\tilde{g}(X_j)} \leq 1 + \varepsilon_0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (8)$$

Следуя логике монтажного подхода, необходимо на каждом пробном шаге  $(t, i)$  подобрать плотность  $\delta = \delta_{t,i}^*$  минимизирующую функционал

$$\Phi_5(\delta) = \max \left\{ \left| \frac{\Delta g(\Omega_{t,i}, \delta; X_j)}{\Delta\tilde{g}(X_j)} - 1 \right|, j = 1, 2, \dots, m \right\}. \quad (9)$$

Пробная конфигурация  $\Omega_{t,i}^*$ , на которой достигается минимальное из значений функционала (8), принимается за текущее приближение  $\Omega_r^*$ . Критерий останова итерационного процесса тот же, что и у базового алгоритма РНК. Признаком того, что конфигурацию  $\Omega_r^*$ , на которой прервался итерационный процесс, можно принять за допустимое решение  $\Omega^*$ , является выполнение неравенства  $\Phi_5(\delta_r^*) \leq \varepsilon_0$ .

### Результаты численных расчетов

Специально для данного раздела статьи мы приберегли ссылку на вышедшую годом раньше, чем [23], работу А.В. Овчаренко [21], в которой предложен метод решения обратной задачи гравиразведки для локального возмущающего объекта  $\hat{S}$ , близкий к алгоритму РНК. В алгоритме А.В. Овчаренко каждое очередное приближение  $\Omega_t^*$  также образуется путем перевода в ядро  $\mathcal{Y}(\Omega_{t-1}^*)$  одного элемента замощения из оболочки  $O(\Omega_{t-1}^*)$ . Основное

различие метода РНК от метода А.В. Овчаренко в том, что последний, помимо истинной плотности  $\hat{\delta}$ , требует знания избыточной массы  $\hat{M}$  тела  $\hat{S}$ . Впрочем, такое условие не столь обременительно, поскольку избыточная масса аномалиеобразующего объекта определяется устойчиво интегральными методами. Для ее оценивания можно задействовать аппроксимационные алгоритмы, в которых наблюдаемое поле подбирается полем любого (пусть даже геологически бессодержательного) модельного распределения источников. В алгоритме РНК плотность, минимизирующая невязку, поддерживает баланс значений модельной и истинной массы источников поля. В методе А.В. Овчаренко все упрощается. Зная  $\hat{\delta}$  и  $\hat{M}$ , можно найти меру  $\mu(\hat{S})$  пространственной области, занятой телом  $\hat{S}$ , и на каждом шаге  $(t, i)$  за условно-оптимальную плотность масс, заключенных в области  $\Omega_{t,i}$ , принимать значение

$$\delta_t^* = \frac{\mu(\hat{S})\hat{\delta}}{\mu(\Omega_{t,i})}. \quad (10)$$

Но возвратимся к планированию схемы проведения численных расчетов. При изучении вопроса о достижимой близости наблюдаемого и подбираемого полей в различных метриках алгоритму стоит дать теоретический шанс выйти на нулевое значение невязки. Если обратная задача решается по приближенным значениям поля и истинный носитель не принадлежит используемому при решении модельному классу, то нельзя узнать, на какую величину  $\Delta\varepsilon$  алгоритм «не дотянул» до минимально возможной невязки. Если же у алгоритма есть шанс точно подобрать наблюдаемые значения поля, то достигнутая невязка и будет тем самым  $\Delta\varepsilon$ . Таким образом, есть смысл: а) решать задачу по точному полю  $\Delta\tilde{g}$ ; б) в качестве истинного носителя  $\hat{S}$  взять конфигурационный носитель  $\hat{\Omega}$ ; в) за нулевое приближение  $\Omega_0^*$  принимать элемент замощения из множества  $\mathcal{Y}(\hat{\Omega})$ .

Рассмотрим прежний пример, на котором мы иллюстрировали работу метода РНК, с той лишь разницей, что интерпретируемая аномалия не содержит помех (но алгоритм в это посвящен не будет). Нам понадобятся следующие характеристики интенсивности аномалии  $\Delta\tilde{g}$ , с которыми будем сопоставлять достигнутые значения функционалов  $\Phi_r$ :

$$v_0 = \left( \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \Delta\tilde{g}^2(x_j) \right)^{1/2} = 0,361 \text{ мГал}, \quad (11)$$

$$v_1 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |\Delta\tilde{g}(x_j)| = 0,304 \text{ мГал}, \quad (12)$$

$$v_2 = \max \{ |\Delta\tilde{g}(x_j)|, j = 1, 2, \dots, m \} = 0,65 \text{ мГал}. \quad (13)$$

Прежде всего, мы заинтересовались тем, насколько заметно течение итерационного процесса РНК будет отличаться от течения итерационного алгоритма А.В. Овчаренко. Как и ожидалось, на протяжении всех 88 итераций графики изменения плотности  $\delta^*(t)$  едва ли не копируют друг друга (максимальное относительное расхождение обеих графиков менее 4%). Весьма схожи и графики изменения невязки (рис. 6). Главным является то, что достигнутые по обоим алгоритмам значения невязки (1) достаточно близки друг к другу и составляют: по алгоритму В.Н. Страхова 1,37% и по алгоритму А.В. Овчаренко 1,02% от интенсивности  $v_0$  аномалии.

Собственно решения обратной задачи по обоим алгоритмам также весьма близки между собой (рис. 7). Иначе говоря, не столь важно, какой из двух алгоритмов будет опробован на предмет адаптации к новым типам априорной информации о свойствах помех. Мы отдали предпочтение более легкому в программировании алгоритму А.В. Овчаренко.

Результаты решения обратной задачи при использовании различных функционалов близости заданного и модельного полей приведены на рис. 8, а сведения о достигнутых значениях невязки наблюдаемого и модельного полей – в табл. 1.

Таблица 2 – это более расширенное представление результатов модельных расчетов. Каждый ее столбец  $s$  отвечает за результаты решения обратной задачи по модификации метода А.В. Овчаренко (а по сути и метода РНК), работающего с тем или иным функционалом  $\Phi_s$ , а каждая строка  $r$  отвечает за определенный тип невязки. Таким образом, каждый элемент  $a_{r,s}$  таблицы – это безразмерная величина, суть которой – значение невязки  $\Phi_r(\delta)$ ,  $r = 0, 1, 2$ , нормированное по величине  $v_r$  интенсивности аномалии. При этом для выбора оптимального варианта перехода к очередному приближению используется функционал локальной оптимальности  $\Phi_s(\delta)$ . Согласно таблице, во всех 18 комбинациях выбора критерия локальной оптимальности текущего приближения и выбора метрики, в которой оценивается относительное значение невязки, последнее колеблется в пределах от 1 до 7%. На наш взгляд, довольно обнадеживающий результат.

«Причуды» итерационных алгоритмов, которые заботятся лишь об оптимальности решения на каждом отдельном шаге, в числе прочего, заключаются в том, что совершенно неожиданно меньшее значение итоговой невязки  $\varepsilon^*$  может быть достигнуто при работе с функционалом  $\Phi_r$ , рассчитанным на иной тип невязки. Так, из таблицы видно, что по всем трем метрикам достигается меньшее значение невязки, если итерационный процесс работает с функционалом  $\Phi_1$ , а не с функционалом  $\Phi_0$ ,

применяемым в базовых алгоритмах В.Н. Страхова и А.В. Овчаренко. При массовых расчетах такого рода ситуация встречалась нам неоднократно. И это надо расценивать как позитивный фактор, когда одни алгоритмы как бы «подстраховывают» другие. Располагая целой плеядой модификаций метода РНК и «запуская» с их помощью начальное приближение  $\Omega_0^*$  по различным «траекториям»  $\Omega_0^*, \Omega_1^*, \dots, \Omega_n^*$ , мы расширим и разнообразим множество  $Q_0$  допустимых решений обратной задачи, необходимых для реализации аддитивных технологий интерпретации.

### Заключение

В работе [12] авторы пришли к выводу, что максимум информации об источниках гравитационного поля, которую может содержать в себе единственный допустимый вариант интерпретации, несут приближенные решения обратной задачи, построенные в соответствии с критериями теории принятия решений в условиях неопределенности и условиях риска. Вместе с тем, аддитивные технологии интерпретации обладают несравненно более высоким уровнем информативности, чем традиционные алгоритмы решения обратных задач гравиразведки, ориентированные на оптимальность одного из возможных вариантов интерпретации, особенно в тех случаях, когда такой вариант выделен из прочих по какому-то отвлеченному признаку (например, минимуму невязки).

Авторы убеждены, что вскоре мы станем свидетелями того, как по мере ослабления позиций классического подхода к обратным задачам гравиразведки и магниторазведки будет происходить упрочение позиций концепции аддитивных технологий. Новые возможности монтажных алгоритмов в вопросе учета информации о свойствах помех в измерениях еще более укрепляют их позиции в споре за право стать основным рабочим инструментом аддитивных технологий. В этой связи заметим, что еще в работе [5] ее авторы спрогнозировали, что в будущем монтажным технологиям будет отведена более заметная роль, чем стать очередным методом минимизации невязки при построении единичного «оптимального» решения обратных задач. И если не считать опыт применения монтажных алгоритмов при реализации гарантированного подхода, то эти прогнозы начинают сбываться спустя почти 30 лет, когда дошел черед до концепции аддитивных технологий интерпретации гравитационных аномалий. Возможность реализовать эту концепцию и обойтись при этом без монтажных алгоритмов пока трудно себе представить.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 15-05-01823А.

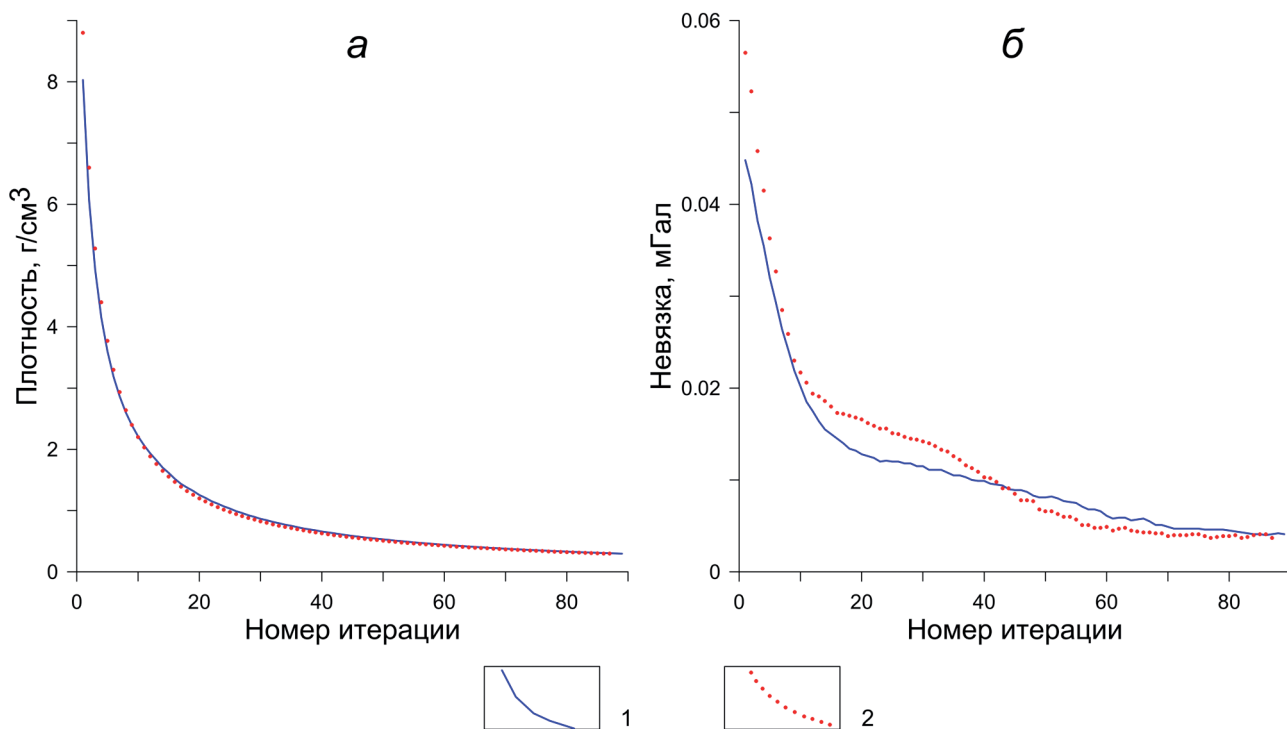


Рис. 6. Графики изменения плотности источника (а) и невязки полей (б) в итерационном процессе для методов: 1 – РНК; 2 – А.В. Овчаренко

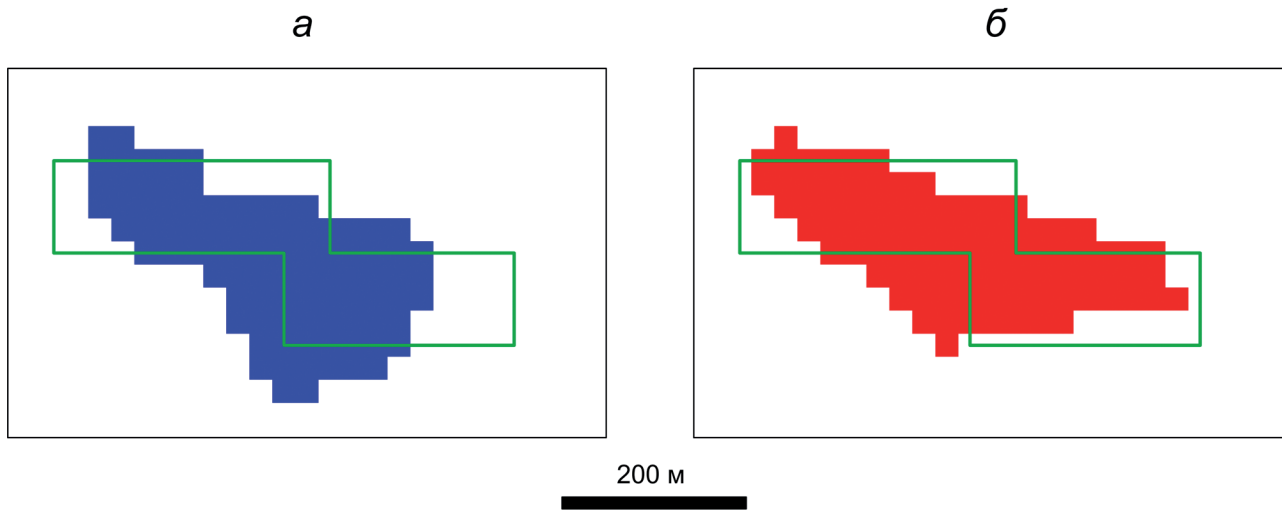


Рис. 7. Результаты решения обратной задачи гравirazведки методами РНК (а) и А.В. Овчаренко (б).  
Примечание: зеленый контур – аномалиеобразующая призма

Таблица 1

Значения невязки наблюдаемого и модельного полей

Тип функционала	$\Phi_0$	$\Phi_1$	$\Phi_2$	$\Phi_3$	$\Phi_4$	$\Phi_5$
Значение	0,0041 мГал	0,0037 мГал	0,0465 мГал	0,0193 мгал	0,0216	0,0678

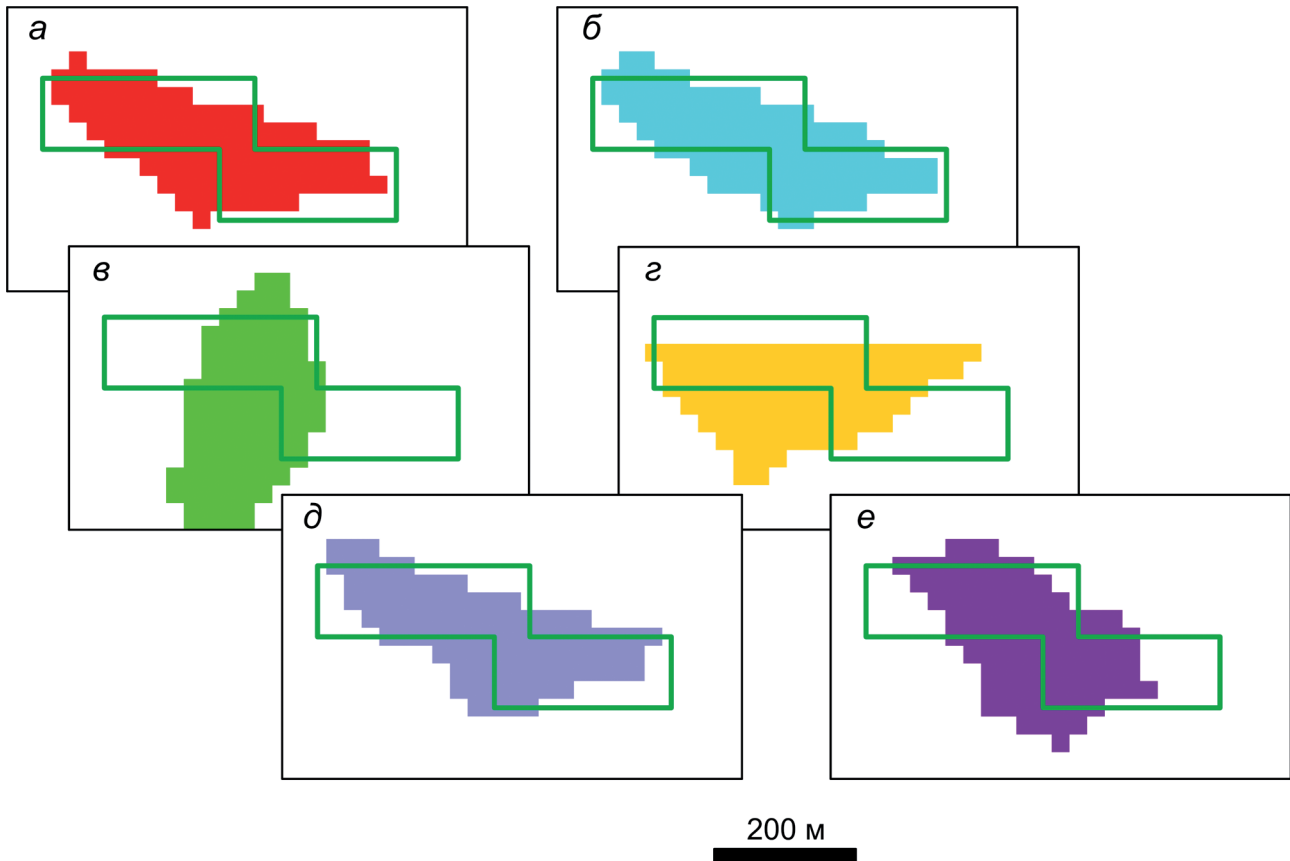


Рис. 8. Результаты решений обратной задачи гравиметрии методом А.В. Овчаренко с использованием разных функционалов оптимальности: а –  $\Phi_0$ ; б –  $\Phi_1$ ; в –  $\Phi_2$ ; г –  $\Phi_3$ ; д –  $\Phi_4$ ; е –  $\Phi_5$ .  
Примечание: зеленый контур – аномалиеобразующая призма

Таблица 2

Достигнутые нормированные значения невязок при работе с шестью различными функционалами близости заданного и подбираемого полей

Тип функционала, используемого при решении	$\Phi_0$	$\Phi_1$	$\Phi_2$	$\Phi_3$	$\Phi_4$	$\Phi_5$
Значение $\Phi_0/v_0$	0,0114	0,0102	0,0653	0,0433	0,0119	0,0391
Значение $\Phi_1/v_1$	0,0106	0,0100	0,0637	0,0462	0,0112	0,0361
Значение $\Phi_2/v_2$	0,0169	0,0123	0,0708	0,0508	0,0154	0,0538

**Ключевые слова:** гравirazведка, обратная задача, монтажный метод, помеха.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Балк П.И. О надежности результатов количественной интерпретации гравитационных аномалий // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1980. – № 6. – С. 65-83.

2. Балк П.И. Использование априорной информации о топологических особенностях источников поля при решении обратной задачи гравиметрии в рамках монтажного подхода // Физика Земли. – 1993. – № 5. – С. 59-71.  
3. Балк П.И. О принципиальных недостатках общепринятых форм представления результатов математической интерпретации потенциальных полей //

- Геофизический журнал. – 2004. – Т. 26. – № 5. – С. 124-132.
4. Балк П.И., Балк С.П. О решении нелинейной обратной задачи гравиметрии с использованием конечноэлементных представлений источников поля // Доклады РАН. – 2000. – Т. 371. – № 2. – С. 231-234.
  5. Балк П.И., Балк Т.В. Резервы детерминистского подхода в повышении эффективности интерпретации гравитационных аномалий // Геология и геофизика. – 1985. – № 12. – С. 104-112.
  6. Балк П.И., Балк Т.В. Структурно-рудная обратная задача гравиметрии // Физика Земли. – 1995. – № 6. – С. 32-41.
  7. Балк П.И., Балк Т.В. Совмещенная обратная задача грави- и магниторазведки // Физика Земли. – 1996. – № 2. – С. 16-30.
  8. Балк П.И., Долгаль А.С. Детерминированный подход к проблеме достоверности результатов интерпретации гравиметрических данных // Док. РАН. – 2010. – Т. 431. – № 1. – С. 334-338.
  9. Балк П.И., Долгаль А.С. Аддитивные технологии количественной интерпретации гравитационных аномалий // Геофизика. – 2016. – № 1. – С. 43-47.
  10. Балк П.И., Долгаль А.С., Балк Т.В., Христенко Л.А. Согласование конкурирующих вариантов интерпретации гравитационных аномалий методом минимизации эмпирического риска // Геоинформатика. – 2015. – № 4. – С. 24-35.
  11. Балк П.И., Долгаль А.С., Балк Т.В., Христенко Л.А. Совместное использование различных методов решения обратных задач гравиразведки для повышения информативности результатов интерпретации // Геофизический журнал. – 2015 – Т. 37. – № 4. – С. 133-150.
  12. Балк П.И., Долгаль А.С., Балк Т.В., Христенко Л.А. Критерии теории принятия решений в задачах количественной интерпретации гравитационных аномалий // Геоинформатика. – 2016. – № 3. – С. 29-40.
  13. Балк П.И., Долгаль А.С., Христенко Л.А. Локализация геологических объектов по данным гравиразведки при неполной информации о плотности горных пород // Доклады РАН. – 2012. – Т. 442. – № 5. – С. 686-690.
  14. Балк П.И., Йёске А. Монтажный подход В.Н. Страхова к решению обратных задач гравиразведки // Геофизический журнал. – 2013. – Т. 35. – № 1. – С. 12-26.
  15. Балк Т.В., Новоселова М.Р., Балк П.И., Турутанов Е.Х. О точности определения нижней границы геологического объекта по гравиметрическим данным // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1988. – № 3. – С. 81-86.
  16. Булах Е.Г., Корчагин И.Н. О подборе аномальных источников гравитационного поля методом последовательных приращений модели // Докл. АН УССР. – Сер. Б. – 1978. – № 10. – С. 1059-1062.
  17. Долгаль А.С., Балк П.И. Деменев А.Г., Мичурин А.В., Новикова П.Н., Рашидов В.А., Христенко Л.А., Шархимуллин А.Ф. Использование метода конечных элементов при интерпретации данных гравиразведки и магниторазведки // Вестник КРАУНЦ. – 2012. – Т. 1. – № 19. – С. 108-127.
  18. Долгаль А.С., Мичурин А.В. Новая модификация монтажного метода решения нелинейной обратной задачи гравиметрии // Уральский геофизический вестник. – 2010. – № 2. – С. 34-40.
  19. Долгаль А.С., Шархимуллин А.Ф. Повышение точности интерпретации моногеничных гравитационных аномалий // Геоинформатика. – 2011. – № 4. – С. 49-56.
  20. Завойский В.Н., Неисжал Ю.Е. Декомпозиционно-итерационный метод решения обратной задачи магниторазведки // Геофизический журнал. – 1979. – Т. 1. – № 12. – С. 4652.
  21. Овчаренко А.В. Подбор сечения двумерного тела по гравитационному полю // Вопросы нефтяной и рудной геофизики. – Изд-во Казах. политехн. ин-та. – 1975. – Вып. 2. – С. 71-75.
  22. Страхов В.Н. Главнейшая задача в развитии теории и практики интерпретации потенциальных полей в начале XXI века – разрушение господствующего стереотипа мышления // Геофизика. – 2001. – № 1. – С. 3-18.
  23. Страхов В.Н., Лапина М.И. Монтажный метод решения обратной задачи гравиметрии // Доклады АН СССР. – 1976. – Т. 227. – № 2. – С. 344-347.
  24. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М. : Наука, 1979. – 284 с.
  25. Schäfer U. Die Lösung einer inversen Aufgabe für gravimetrische und geomagnetische Anomalien mittels der Montagemethode. – Potsdam : Zentralinstitut für Physik der Erde, 1990. – 137 s.