УДК 550.831.016:519.6

П.И. Балк, А.С. Долгаль, Т.В. Балк, Л.А. Христенко

КРИТЕРИИ ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ГРАВИТАЦИОННЫХ АНОМАЛИЙ

Введение

С сожалением приходится констатировать, что стремительные темпы развития математической теории интерпретации гравитационных аномалий, присущие 70-90 годам, остались в прошлом – и, похоже, безвозвратно. На то есть объективные причины. Наука потеряла многих геофизиков-теоретиков, которые стояли у истоков математической теории интерпретации потенциальных полей и были генераторами большинства методообразующих идей, да и экономическая ситуация, в которой находится геологическая отрасль, не располагает к финансовым затратам на проведение исследовательских и компьютерных разработок. В меньшей степени, чем прежде, геофизики-производственники могут рассчитывать на академическую науку. При этом сама потребность в развитии программно-алгоритмического обеспечения гравиразведки никуда не исчезла. Напротив, возросшая точность определения значений силы тяжести (сегодня это порядка 0,005-0,015 мГал) создает неплохие предпосылки к расширению круга геологических задач, которые можно было бы успешно решать с помощью гравиразведки при наличии должного программно-алгоритмического обеспечения.

Сложившееся положение дел не располагает к распылению усилий геофизиков-теоретиков на задачи второстепенного характера и клонированию известных методов интерпретации, когда при кажущемся многообразии алгоритмов решения обратных задач многие из них, по меткому выражению академика В.Н. Страхова, различаются «кто на ε, а кто и вовсе на δ». Следует сосредоточиться на поиске скрытых возможностей повышения информативности гравиразведки, а каждый новый подход или алгоритм решения обратной задачи, во избежание дублирования результатов, сопровождать сравнением с уже имеющимися наработками. Успех во многом будет зависеть от того, какие смежные науки мы выберем в союзники и в какой мере доверимся их общеметодологическим установкам. В афористичной форме В.Н. Страхов описал ситуацию так [18]: «математика является языком всех естественных наук, но каждая конкретная наука должна «разговаривать» на собственном диалекте этого универсального языка», что ставит под сомнение возможность эффективного развития теории интерпретации гравитационных аномалий за счет одного только заимствования идей и методов вычислительной математики.

Наиболее распространенной является точка зрения, согласно которой задачи количественной интерпретации данных гравиразведки следует рассматривать как некорректные обратные задачи математической физики, описываемые операторным уравнением $Az = u$, где сколь угодно малые вариации правой части могут привести к сколь угодно большим изменениям решения z [24]. Как математическая наука, теория решения некорректных обратных задач построена безукоризненно: минимум априорных ограничений на свойства оцениваемого решения и помехи (гладкость решения и возможность устремления нормы помехи к нулю), максимум отдачи (сходимость последовательности приближенных решений к точному решению). Эта теория может позволить себе не замечать некоторые проблемы, которые ставят перед собой другие подходы, считающие обязательным учитывать реалии геофизической практики. Логика проста: если можно обеспечить заданную точность приближенного решения (разумеется, на бумаге), то нет нужды в любых дополнительных исследованиях сверх тех, что гарантируют сходимость.

Вполне возможно, что теория решения некорректных обратных задач могла бы на правах более общей формализованной теории патронировать теорию интерпретации гравитационных полей в части, касающейся количественной интерпретации данных, если бы не одна «малость» – абсолютная неадекватность методологии этой теории реалиям и целям геофизической практики. Впору ставить вопрос не о заимствовании результатов математической теории решения некорректных обратных задач, а о том, как оградить теорию интерпретации гравитационных аномалий, как прикладную науку, от чуждых идей другой теории, которая по чисто формальным признакам претендует на нее как на одну из сфер своего применения. Поставленная перед математической геофизикой цель создания адекватной теории интерпретации гравитационных аномалий недостижима, пока над ней будет довлеть методология теории решения некорректных задач математической физики с ее посылами, не имеющими ничего общего с реалиями практики (возможность управлять уровнем помех, располагая измерениями силы тяжести в континуальном множестве точек), с ее установкой на оценку состоятельности метода по его виртуальным свойствам (существующая в воображении сходящаяся последовательность приближенных решений и лишь умозрительная возможность получить результат с желаемой точностью), с ее упорным стремлением работать с бесконечномерными, функциональными пространствами (в плане математики это более интересно), тогда как в силу дискретности гравиметрических измерений информационно обеспеченными являются лишь конечномерные постановки обратных задач гравиразведки, наконец, с ее намеренным игнорированием естественных ограничений на физические и геометрические параметры источников аномалии (поскольку те попросту выведут обратную задачу из класса некорректно поставленных, закроют спекулятивную тему о *сколь угодно* больших ошибках решения, и на этом можно будет поставить точку). Если отбросить весь тот антураж (стремление последовательности приближенных решений к точному и прочее), который обрамляет сам способ построения регуляризованного решения обратной задачи, и оценивать теорию регуляризации в сугубо прикладном плане, то «в сухом остатке» от нее остается один из многочисленных методов построения допустимого решения обратной задачи при специфической информации об особенностях решения, допускающий формализацию в виде стабилизирующего функционала.

К этим выводам авторы статьи пришли в разное время и в совместных публикациях последних лет отводят ему центральное место.

Чтобы прочувствовать, как разительно отличается математический взгляд на существо обратных задач от геофизического, сошлемся на монографию [13]. В ней с первых страниц, как бы анонсируя общую направленность исследований, говорится, что для корректно поставленных обратных задач дополнительная информация не принципиальна (могут ли геофизики с этим согласиться?!), а в случае некорректных обратных задач избыточные данные нужны для повышения скорости сходимости регуляризованных решений (всего-навсего!). После такого не будет большим преувеличением сказать, что оператор решения прямой задачи – едва ли не единственное, что связывает теоретические и прикладные постановки обратных задач геофизики (в [2-4] приводятся соответствующие тому доводы). При этом не следует заблуждаться, считая, что строгость математических построений в состоянии сгладить издержки от неадекватности исходных посылок, на которых они выполнены.

Критика без встречных позитивных предложений негативна, поскольку способна отвергнуть, пусть не идеальное, но лучшее и полезное из имеющегося. В числе первых публикаций в геофизических изданиях, которые пришлись на время повального увлечения геофизиков идеями теории решения некорректных обратных задач и в которых обращено внимание на отрицательные последствия полного заимствования результатов этой теории, были и работы авторов данной статьи. В них критика господствующего подхода к решению обратных задач сопровождалась предложением новых в идейном плане алгоритмов решения *рудных* [1], *линейных* [10] и *структурных* [11] обратных задач гравиразведки. Авторы назвали их *гарантированными*. Две особенности этих алгоритмов – новые математические формы представления результатов интерпретации и собственные средства для оценивания их информативности – наметили отличный от известных подход к решению обратных задач гравиразведки. Правда, он пока не получил той поддержки специалистов, на которую, казалось бы, имел право рассчитывать. В его пользу косвенно говорит тот факт, что близкий подход, и примерно в те же годы, начал интенсивно развиваться в ряде других наук, в частности в теории управления [27] (об этих исследованиях автор работы [1] узнал лишь спустя лет 10 после ее опубликования). Что интересно, в теории управления подход также был назван гарантированным. Не будем обсуждать причины, препятствовавшие продвижению идей гарантированного подхода в практику количественной интерпретации гравитационных аномалий, и условия, при которых все могло бы пойти иначе – известное «история не терпит сослагательного наклонения» в равной степени относится и к истории развития математической теории интерпретации потенциальных полей. И все же нельзя не вспомнить здесь статью академика Л.В. Канторовича [14], которая наравне с работами академика А.Н. Тихонова [22, 23] могла уже с начала 70-х годов стать родоначальником другого большого направления (мы назвали бы его сейчас *гарантированным*) в теории решения обратных задач гравиразведки. Но, видимо, геофизиков-теоретиков тех лет в большей степени «заворожили» иллюзорные перспективы получения приближенных решений с желаемой точностью, чем «прозаическая» установка на оценку объективно возможного в данных условиях интерпретации (напомним, что в [14] решалась задача построения неулучшаемых двухсторонних оценок избыточной массы источников гравитационной аномалии).

И еще. Презентация теории некорректных обратных задач математической физики обычно начинается с преамбулы: «прежде считалось, что эти задачи принципиально неразрешимы (идут ссылки на известных корифеев математики), но оказывается, что это не так». В действительности же никакого чуда не произошло, зато имеет место очевидная подмена – неразрешимыми математики тех лет называли класс обратных задач, в постановке которых речь не шла о каких-либо дополнительных ограничениях на свойства решения, тогда как теория А.Н. Тихонова построена для другого класса задач, в которых такие ограничения уже присутствуют.

Интерпретация гравитационных аномалий в терминах пары пространственных областей D_1 и D_2 [1], не являющихся допустимыми решениями обратной задачи, но обеспечивающих неулучшаемые оценки неизвестного истинного носителя $\widehat{S}$ источников аномалии – $D_2 \subset \widehat{S} \subset D_1$, подвела авторов настоящей статьи к концепции создания своего рода *банка* математических форм представления результатов интерпретации, позволяющих дифференцированно подойти к проблеме извлечения различных типов информации об аномалиеобразующем объекте. Наиболее эффективными в этом смысле оказались специализированные функции распределения некоторого параметра $\lambda(X)$, $X \in D \subset \mathbf{R}^3$, позволяющего оценить вероятность успеха при выполнении работ, следующих тем рекомендациям, которые заложены в распределении $\lambda(X)$. Так, *функция обнаружения* [6] задает распределение вероятности подсечения возмущающего объекта при заверке гравитационной аномалии скважиной, пробуренной в точку X изучаемого фрагмента геологической среды. Исследования в этом направлении только разворачиваются, но уже сейчас для поддержки определенных целей, под которые выполняется гравиметрическая съемка, разработаны функции *локализации* [12], *отношения порядка* [5] и *доверия* [8]. Новые формы объективно являются более прогрессивными. Но, пропагандируя их, надо иметь в виду один психологический момент: геофизику пока трудно с ними свыкнуться. Слишком сильны стереотипы, о необходимости разрушения которых неоднократно высказывался В.Н. Страхов [19, 20]. В этой связи тем более важно обнаружить, что и в рамках традиционных форм представления результатов интерпретации гравитационных аномалий в виде наилучшего приближенного решения обратной задачи из числа допустимых, резервы гравиразведки далеко не исчерпаны.

Новый взгляд на проблему оптимальности решений обратных задач

Вопрос о структуре критериев выбора наилучшего варианта интерпретации – это часть проблемы. С оптимальностью дело обстоит сложнее, чем принято считать. Всегда существует множество допустимых вариантов интерпретации Q, отвечающих априорным ограничениям, заданным в терминах структурных элементов модельного класса M источников поля; каждый элемент множества Q вправе претендовать на статус неизвестного истинного решения обратной задачи. Свойство оптимальности должно служить рабочим инструментом для извлечения надежной информации об источниках аномалии. Оптимальное решение обязано чутко реагировать на структуру множества Q (что не скажешь о критерии минимума невязки). Если признать, что информационно оправданы лишь конечнопараметрические классы $M_?$ и учесть естественные ограничения на плотность и размеры геологических тел, то Q – ограниченное множество в $\mathbf{R}^n$.

Оптимальность отдельно взятого решения обратной задачи не может быть всеохватывающей – какой бы элемент ни взять из Q, он не окажется лучше остальных допустимых решений сразу по всем содержательным характеристикам. Как раз по этой причине в теории принятия решений и существует целая группа критериев оптимальности [16, 17, 26]. Мы считаем, что надо отказаться от привычного глобально оптимального решения в пользу нескольких локально оптимальных решений, каждое из которых отвечает за конкретную особенность оцениваемого решения. Такой подход сгладит противоречия, из-за которых «оптимальность» приходится брать в кавычки, подчеркивая ее условность и вспоминая об известном изречении Дж. Тьюки «оптимальность становится опасной, если ее принимать слишком всерьез». Наша позиция состоит в том, что во всякой задаче множество Q имеет *несколько* своего рода «особых точек», каждая из которых суть решение, оптимальное по какому-то частному признаку, по которому оно и превосходит остальные допустимые решения обратной задачи. Таких локально-оптимальных решений не может быть много. К тому же важно, чтобы признак локальной оптимальности был завязан на объем и качество информации, содержащейся в решении, и при оценке эффективности алгоритма не ссылаться на предельные свойства решения при идеализации помехи измерений поля. Важно также, чтобы алгоритмы располагали собственными возможностями для оценки информации об изучаемом объекте, которую несет приближенное решение обратной задачи. Предоставим читателю право самому оценить, в какой мере решения обратной задачи по методу подбора и методу регуляризации [24] могут – в свете этих требований – претендовать на статус «особых точек» множества Q.

Строгого определения информации до сих пор не найдено. Воспользовавшись предоставленной свободой, в работе [8] введено несколько частных определений, ориентированных на класс нелинейных обратных задач гравиразведки рудного типа. Выделим: область $D^{(0)} = \widehat{S} \cap S^*$ как общий фрагмент реального и модельного носителей $\widehat{S}$ и S^*; область $D^{(1)} = S^* \setminus \widehat{S}$, которая позиционирует себя как фрагмент истинного носителя, но таковым не является; область $D^{(2)} = \widehat{S} \setminus S^*$, являющуюся фрагментом носителя $\widehat{S}$, не нашедшим отражение в приближенном решении S^* обратной задачи. Назовем область $D^{(0)}$ *достоверной*, область $D^{(1)}$ – *ложной*, а область $D^{(2)}$ – *потерянной* информацией. Их лебеговы меры $\mu(D^{(j)})$, $j = 0, 1, 2$, можно принять за количественную оценку каждого из трех названных типов информации. При обосновании локальной оптимальности решений, отвечающих тем или иным критериям, будем опираться на эти типы информации.

Оптимальные решения в условиях неопределенности

Дальнейшее изложение ведется в терминах рудной обратной задачи гравиразведки, где элементы $S_\alpha \in M$ – носители возмущающих масс плотности $\widehat{\delta}$. Как это обычно принято, будем считать, что класс M обладает достаточными аппроксимативными свойствами и априорные ограничения не противоречивы.

Предварим описание предлагаемых критериев следующим замечанием. Поиск оптимальных решений, отвечающих большинству критериев из теории принятия решений, сводится к более сложным, чем условно-экстремальные, задачам минимакса и максимина. Формально мы могли привести их запись в общем виде, но это было бы простой отпиской, поскольку реализовать их при сложной структуре множества Q сегодня не представляется возможным. Конструктивный подход заключается в том, чтобы обосновать возможность работы не со всем множеством Q, а с некоторым его конечным подмножеством Q_0. Начнем с того, что даже при самых придирчивых требованиях к адекватности модели источников поля, несчетное множество Q допустимых решений содержит систему конечных подмножеств $Q^{(\beta)}{}_0 \subset Q$, таких, что для любого элемента $S_\alpha \in Q$ в каждом из этих подмножеств отыщется элемент $S_{\beta(\alpha)}$, расхождением которого с S_α можно пренебречь. Термин «расхождение» можно трактовать достаточно широко, не только как близость двух носителей в классической метрике. Достаточно, чтобы в подмножестве $Q_0 \subset Q$ нашелся элемент S°, такой, что о нем достаточно знать ровно столько, сколько надо знать об истинном носителе $\widehat{S}$, чтобы решить поставленную геологическую задачу. Если предстоит заверка гравитационной аномалии бурением, то может хватить, чтобы глубины до верхней кромки носителей S° и $\widehat{S}$ были примерно одни и те же. С учетом сказанного будем исходить из того, что интерпретатор располагает широким набором $Q_0 = \{S_i\}_{i=1}^n$ допустимых решений обратной задачи, который содержит элемент S°, обладающий указанным выше свойством; из этого набора и необходимо отобрать несколько локально оптимальных вариантов интерпретации. В случае сомнений относительно репрезентативности множества Q_0 посоветуем руководствоваться простой мыслью: если реализация полной постановки задачи невозможна, следует оптимизировать решение в рамках того, чем располагаем, и оценивать вклад новой, пусть и усеченной, постановки по отношению к тому, чем до того располагала теория интерпретации гравитационных аномалий.

Теория принятия решений оперирует с двумя множествами – множеством $\Omega = \{\Omega_\alpha\}$ возможных состояний природы (изучаемого объекта), одно из которых ($\widehat{\Omega}$) будет иметь место (заранее неизвестно, какое именно), и конечным множеством $A = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ альтернативных действий, любое из которых может выбрать лицо, принимающее решение. Последствия принятия решения A_i характеризует *функция полезности* (*выгоды*) $\rho : (A \times \Omega) \rightarrow \mathbf{R}$. Иногда удобнее в качестве ρ брать *функцию потерь*. Каждая задача принятия решений имеет свой *критерий оптимальности*, который позволяет упорядочить все альтернативные решения из A по предпочтению в соответствии с целевой задачей выбора и возможными состояниями Ω_α изучаемого объекта. Задачи, рассматриваемые в теории принятия решений, подразделяются на два класса. Первый охватывает случаи, когда априорное распределение вероятностей событий $\Omega_\alpha = \widehat{\Omega}$ неизвестно, а второй – когда оно задано. В первом случае говорят, что решение принимается в условиях неопределенности, а во втором – в условиях риска [17, 26].

Если обратные задачи гравиразведки рассматривать как задачи теории принятия решений, то $A = \Omega = Q$ и $\rho(S_i, S_j)$ суть потери (или выигрыш) при выборе носителя S_i в качестве оценки истинного носителя $\widehat{S}$, тогда как в реальности $\widehat{S} = S_j$. С задачей оценивания области $\widehat{S}$, занятой источниками аномалии, неплохо согласуются метрики ρ, порожденные мерой Лебега μ в $\mathbf{R}^n$, к примеру:

$$\rho(S^*, \widehat{S}) = 1 - \frac{\mu(S^* \cap \widehat{S})}{\mu(S^* \cup \widehat{S})}. \qquad (1)$$

Метрика Штейнхауса (1) нормирована на отрезке [0,1], в ее структуре нашли отражение все три типа информации – *достоверная*, *ложная* и *потерянная*.

Критерий равнозначных состояний Лапласа. В его основе лежит посылка, которая применительно к обратным задачам гравиразведки звучит так: если ни одному из носителей $S_i \in Q$ нельзя априори отдать предпочтение, то вероятности совпадения их с истинным считаются равными. Если выбранная функция $\rho(S^*, \widehat{S})$ символизирует *потери* от принятия $S^* \in Q$ в качестве оценки для $\widehat{S}$, то по Лапласу решение $S^* \in Q$ оптимально, если оно удовлетворяет условию:

$$\Phi_L(S^*) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\rho(S^*, S_j) = \min\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\rho(S_i, S_j),\ i=1,2,...,n\right\}, \quad (2)$$

и $\Phi_L(S^*)$ – его качество. Если $\rho(S^*, \widehat{S})$ характеризует *выигрыш*, то для определения S^* надо ставить аналогичную (2) задачу максимизации.

Критерий Лапласа рассчитан на средние показатели при многократном использовании в схожих условиях. Оптимальное по критерию Лапласа решение S^* минимизирует оценку *математического ожидания потерь* ρ, когда случайная величина с исходами $S_i = \widehat{S}$, $S_i \in Q$, равномерно распределена на множестве Q. В этом критерии точность решения (или потери) задействована напрямую, и мы включаем его в число критериев локальной оптимизации, где признак оптимальности – минимум математического ожидания потерь.

Критерий максимина Вальда. Для каждого из допустимых решений $S_i \in Q$ введем его «антипод» $\overline{S}_i \in Q$, который в случае $\widehat{S} - \overline{S}_i$ максимизирует *потери* ρ от принятия решения S_i в качестве оптимального:

$$\rho(S_i, \overline{S}_i) = \max\left\{\rho(S_i, S_j) : j = 1, 2, ..., n\right\}. \quad (3)$$

Наилучшим по Вальду является решение $S^* \in Q$, отвечающее условию:

$$\Phi_W(S^*) = \rho(S^*, \overline{S}^*) = \min\left\{\rho(S_i, \overline{S}_i) : i = 1, 2, ..., n\right\}. \quad (4)$$

Критерий Вальда рассматривает природу как агрессивно настроенного и сознательно действующего противника, который предельно жестко играет против субъекта, принимающего решение. Как и в случае с другими критериями этой группы, достоинство критерия Вальда в том, что он рассчитан на оценивание качества решения S^* с учетом фактической конфигурации множества Q. Если за $\rho(S^*, \widehat{S})$ взять объем $\mu(S^* \cap \widehat{S})$ скрытой *достоверной* информации о носителе $\widehat{S}$, которую несет носитель S^*, то верхняя оценка объема *достоверной* информации, которую несет оптимальное по Вальду решение S^*, является наилучшей. Для любого $S_i \in Q$, $S_i \neq S^*$: $\rho(S^*, \widehat{S}) \leq \rho(S^*, \overline{S}_i^*)$, $\rho(S_i, \widehat{S}) \leq \rho(S_i, \overline{S}_i)$, но $\rho(S^*, \overline{S}_i) \leq \rho(S_i, \overline{S}_i)$ и на практике (где вряд ли стоит ожидать предельно жесткого противостояния природы) можно надеяться, что последнее соотношение примет характер строгого неравенства.

Как критерий крайнего пессимизма, критерий Вальда часто идет вразрез со здравым смыслом. Представим, что: множество Ω конечно и совпадает с A; элементами z_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, этих множеств являются реальные числа, причем $z_1 = 5$, $z_2 = 10$, тогда как все остальные элементы z_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, принадлежат отрезку (0,1); как принято, $\widehat{z} \in \Omega$; функция потерь ρ есть метрика в **R**. Тогда оптимальным по Вальду является решение $z^* = z_1$ и критерий гарантирует, что $\rho(z^*, \widehat{z}) \leq \leq \rho(z_1, z_2) = 5$. Таким образом, оценка точности решения не зависит от мощности n множеств A, Ω и особенностей размещения всех $n - 2$ элементов z_i на отрезке (0,1), а определяется всего двумя элементами. Строго говоря, мы обязаны считаться с тем, что один из этих двух элементов может оказаться истинным решением $\widehat{z}$, хотя с ростом n это все менее вероятно. Но стоит исключить оба решения z_1 и z_2 из рассмотрения, как верхняя оценка точности оптимального по Вальду решения понижается в 5 раз: $\rho(z^*, \widehat{z}) < 1$.

Куда клонят авторы, наверное, уже понятно. Необходимо задаться некоторым $n_0 < n$, при котором отношение $p = n_0/n$ можно рассматривать как доверительную вероятность и исключить из построения $n - n_0$ допустимых решений, которые (сообща) максимально ухудшают оценку $\rho(S^*, \widehat{S})$. Чем замечательна конечность множества Q, так это возможностью решать большинство сопутствующих проблем, в том числе и названную, простым перебором.

В доступных нам изданиях, посвященных теории принятия решений, мы не обнаружили каких-либо ссылок на модификации критерия Вальда, которые были бы близки к предложенной выше.

Критерий минимакса сожалений Сэвиджа. Сожаление в теории принятия решений – это потери в результате упущенных возможностей, его мера – это дополнительный выигрыш, который мы теряем, взяв не самое лучшее решение. При разумно выбранном функционале *выигрыша* $\rho(S_k, S_j)$ логично требовать, чтобы $\rho(S_j, S_j) \geq \rho(S_k, S_j)$ при любом $k \neq j$ (при этом вовсе не обязательно, чтобы значения $\rho(S_j, S_j)$ совпадали при всех j). Тогда *мера сожаления*

$$\Delta\rho(S_k, S_j) = \rho(S_j, S_j) - \rho(S_k, S_j). \quad (5)$$

По Сэвиджу наилучше решение $S^* \in Q$ отвечает условию

$$\Phi_C(S^*) = \max\{\Delta\rho(S^*, S_j) : j = 1, 2, \ldots, n\} = \\ = \min\{\max\{\Delta\rho(S_i, S_j) : j = 1, 2, \ldots, n\}, i = 1, 2, \ldots, n\}, \quad (6)$$

а значит, минимизирует максимально возможные потери.

Если функционал ρ нормирован на отрезке [0, 1] и $\rho(S_j, S_j) \equiv 1$, то

$$\Delta\,\rho(S_k,S_j) = 1 - \rho(S_k, S_j) \qquad (7)$$

и оптимальные решения по критериям Сэвиджа и Вальда совпадут.

При построении решения S^*, оптимального по критерию Сэвиджа, попутно вычисляется оценка меры достоверной информации, содержащейся в S^*.

Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица. Он является компромиссным: лучшее решение определяется исходя из наиболее оптимистического и самого жесткого ответа природы на выбранное решение S^*. Пусть ρ символизирует *выигрыш* и по аналогии с (3)

$$\rho_0(S_i, \overline{S}_i) = \min\{\rho(S_i, S_j): j = 1, 2, ..., n\}. \qquad (8)$$

По Гурвицу решение $S^* \in Q$ оптимально, если для заданного коэффициента пессимизма $\alpha \in [0, 1]$ выполняется условие

$$\Phi_G(S^*) = \max\{\Phi_G(S_k): k = 1, 2, \ldots, n\}, \qquad (9)$$

где

$$\Phi_G(S_k) = \alpha\rho_0(S_k, \overline{S}_k) + (1 - \alpha)\rho(S_k, S_k). \qquad (10)$$

Субъект, выбирающий решение по критерию Гурвица, грубо упрощает реальную ситуацию и полагает, что природа либо с вероятностью α поставит его в самую невыгодную ситуацию, либо с вероятностью $(1 - \alpha)$ – в самую благоприятную.

По мнению авторов, для целей использования критерия Гурвица в обратных задачах гравиразведки последний имело бы смысл обобщить, разбив множество Q на некоторое число взаимно не пересекающихся подмножеств Q_j и приписав каждому из них свой коэффициент пессимизма α_j. В каждом множестве Q_j устанавливается наихудший исход, и далее построения ведутся по прежней схеме.

Оптимальные решения в условиях риска

Рассмотрим критерии принятия решения в случае, когда событиям $\widehat{S} = S_i$ можно приписать вероятности. Даже слабая информация о помехе измерений ξ может существенно повысить качество результатов интерпретации. Взять, к примеру, равенство нулю медианного значения $Me(\xi)$. Посылка $Me(\xi) = 0$ оправдана, если в модели возмущающего объекта $\widehat{S}$ не отражены локальные приповерхностные неоднородности и среди наибольших по модулю геологических помех преобладают помехи одного знака. Ограничение $Me(\xi) = 0$ оказалось достаточно действенным при решении линейной обратной задачи гравиразведки [9].

Критерий максимума ожидаемой полезности. Он уже рассматривался в работе [7]. В этом критерии отражена типичная психология лица, принимающего решение: если ожидаемый выигрыш превосходит затраты, то по «здравому смыслу» на них стоит идти.

Пусть случайная величина описывает с вероятностями p_i события $\widehat{S} = S_i$, $S_i \in Q$. Ее математическое ожидание

$$E(\rho(S_k, \widehat{S})) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, \rho(S_k, S_i) \qquad (11)$$

суть ожидаемая полезность от принятия решения $S_k \in Q$ в качестве результата интерпретации. Приближенное решение $S^* \in Q$ считается наилучшим, если

$$\Phi_1(S^*) = E(\rho(S^*, \widehat{S})) = \max\{E(\rho(S_k, \widehat{S})),\ k = 1, 2, \ldots, n\}. \qquad (12)$$

По нашему мнению, известные критерии принятия решений в условиях риска только выиграют, если в их структуре найдет отражение принцип доверительной вероятности p. Идея состоит в следующем. Предположим, что для заданного p есть возможность выделить из множества Q подмножество Q_0 с диаметром, существенно меньшим, чем у Q, и при этом оценка вероятности $P(S_i \in Q_0 | S_i \in Q) \geq p$. Тогда для функционала полезности ρ должно иметь место ярко выраженное неравенство

$$\rho^{(\min)}(Q_0) = \min\{\rho(S_k, S_i): S_k, S_i \in Q_0\} > $$
$$> \min\{\rho(S_k, S_i) : S_k, S_i \in Q\} = \rho^{(\min)}(Q). \qquad (13)$$

Есть смысл пренебречь «малой» вероятностью и работать не с множеством Q, а с его подмножеством Q_0, отвечающим вероятности p, которая устроит заказчика интерпретационных работ. Неадекватность несколько повысится, но качество оптимального решения на подмножестве Q_0 будет заметно выше качества оптимального решения на множестве Q. Как обеспечить разумный компромисс – это отдельная задача; на ее решение накладываются и другие проявления неадекватности, которых полностью не избежать, а также неопределенность в вопросе о том, в какой степени подмножество допустимых решений, из которого осуществляется выбор оптимального, «не дотягивает» до репрезентативного.

Критерий Ходжа-Лемана. Он представляет комбинацию критериев, взятых из двух разных классов – критерия Вальда и критерия максимума ожидаемой полезности. Определим величину $\rho^{(\min)}(S_k)$ как в (8), а величину $E(\rho(S_k, \widehat{S}))$ как в (11). Пусть

$$\varphi(S_k,\alpha) = \alpha\rho^{(\min)}(S_k) + (1 - \alpha)E(\rho(S_k, \widehat{S})), \qquad 14$$

где ρ – функция полезности, а $\alpha \in [0, 1]$ – параметр пессимизма. Решение $S^* \in Q$ считается наилучшим, если

$$\Phi_2(S^*) = \varphi(S^*,\alpha) = = \max\{\varphi(S_k,\alpha) : k = 1, 2, \ldots, n\}. \quad (15)$$

Первое слагаемое в (14) играет роль страховки на те патологические случаи, когда ориентация на одно лишь математическое ожидание себя не оправдывает (как сильно можно обмануться в расчете на математическое ожидание, хорошо иллюстрирует известный Санкт-Петербургский парадокс Бернулли [15]).

Критерий наиболее вероятного состояния природы. Это, пожалуй, тот критерий, который субъект, не искушенный в теории, мог бы предложить сам: в качестве наилучшего выбирается решение $S^* \in Q$, для которого априорная вероятность события $S^* = \widehat{S}$ максимальна.

Авторы не нашли однозначного ответа на вопрос о том, что принять за качество $\Phi_3(S^*)$ такого решения. Во всяком случае, здравый смысл подсказывает: этот критерий логично использовать тогда, когда существует допустимое решение S_k, для которого вероятность события $S_k = \widehat{S}$ не только заметно превышает вероятности каждого из остальных событий $\widehat{S} = S_i$, $S_i \in Q$, $S_i \neq S_k$, но и сравнима с суммой этих вероятностей. Для обратных задач гравиразведки ситуация, при которой вероятность отдельного события $S_k = \widehat{S}$ сопоставима с суммой вероятностей аналогичных исходов по всем другим решениям из Q, является надуманной. Предположим, однако, что существует и найдено (возможно, опять путем перебора) довольно узкое подмножество $Q_0 \subset Q$, которому решение $\widehat{S}$ принадлежит с высокой вероятностью p, и эту вероятность можно принять за доверительную. В этом случае есть смысл выбирать оптимальное решение из этого подмножества, отдавая отчет в том, что дополнительный риск оправдан за счет роста качества решения.

Критерий минимума ожидаемых сожалений. По существу это обобщение критерия минимакса сожалений Сэвиджа. Определим значения $\Delta\rho(S_k, S_j)$ как в (4). Пусть ς_k – дискретная случайная величина, принимающая значения $\Delta\rho(S_k, S_j)$, и p_j – вероятность события $S_j = \widehat{S}$. Тогда

$$E(\varsigma_k) = \sum_{j=1}^{n} p_j\, \Delta\rho(S_k, S_j). \quad (16)$$

Решение $S^* \in Q$ считается оптимальным, и $\Phi_4(S^*)$ является его качеством, если

$$\Phi_4(S^*) = \min\{E(\varsigma_i): i = 1, 2, \ldots, n\}. \quad (17)$$

Результаты численных расчетов

Надежные выводы можно сделать лишь по результатам серийных расчетов, которые в меньшей степени, чем единичные примеры, подвержены случайности. Для этой цели подходят только модельные примеры – их можно продуцировать в нужном количестве. Всегда есть возможность положить в основу геометрии носителя $\widehat{S}$ модель реального геологического объекта и далее использовать различные выборки случайных чисел в роли помех. Мы полагаем, что примеры из [7] раскрывают смысл критериев принятия решений в условиях риска, и сейчас ограничимся примерами принятия решений в условиях неопределенности.

Была подготовлена серия из $N = 100$ двухмерных модельных примеров P_k, в каждом из которых массы с плотностью $\widehat{\delta} = 0{,}2$ г/см^3 распределены в областях $\widehat{S}_k \in M$ меры $\mu(\widehat{S}_k) = 0{,}5$ км^2 (эти области – суть истинные решения обратной задачи), а помехи в измерениях $\Delta\tilde{g}^{(k)}(x_t)$, $x_t = 0{,}1(t - 1)$ (в км), $t = 1, 2, \ldots, m$, $m = 51$, – различные выборки $\Xi_k = \{\xi_{k,t}\}_{t=1}^{m}$ равномерно распределенных случайных чисел со стандартным отклонением, составляющим чуть более 2% от амплитуды аномалии. Чтобы носителям $\widehat{S}_k$ придать относительно случайный характер, в качестве последних взяты допустимые решения обратной задачи, поставленной для некоторого локального источника поля (понятно, что его геометрия для дальнейшего никакого значения не имеет). Несколько наугад взятых носителей $\widehat{S}_k$ представлены на рис. 1, а отвечающие им гравитационные эффекты (осложненные помехой) – на рис. 2.

Модельный класс M – множество всех безотростковых (по определению из [1]) связных конфигурационных (по терминологии из [21]) носителей, принадлежащих прямоугольной области R меры $\mu(R) = 2{,}2$ км^2, пространственное расположение которой согласовано с сетью точек измерения x_t.

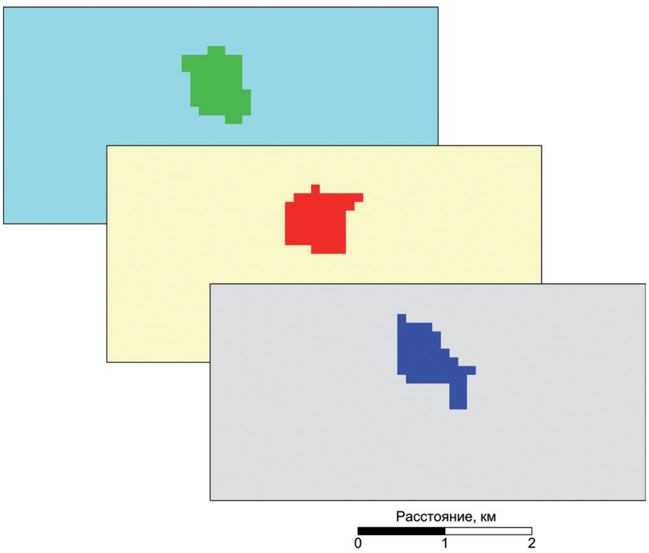

Рис. 1. Модельные носители $\widehat{S}_k$ возмущающих масс в примерах P_8, P_{69}, P_{99}

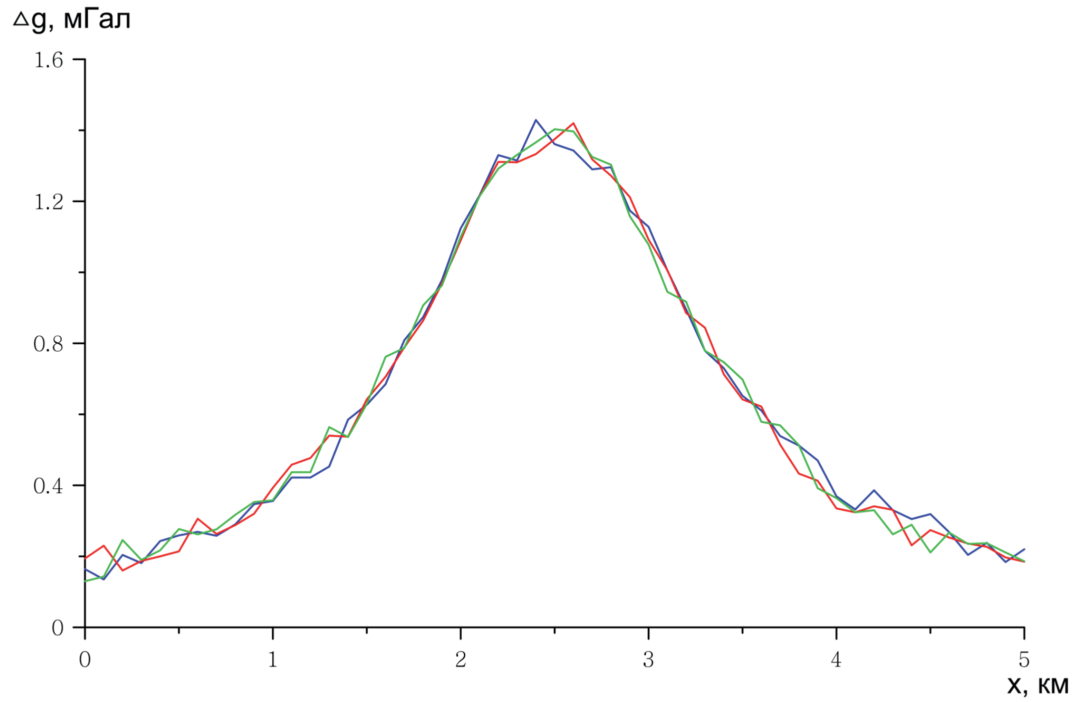

Рис. 2. Графики гравитационного поля для примеров P_8, P_{69}, P_{99}

Модельные носители строятся на основе замощения области R квадратами ω_r со стороной 0,1 км. За качество $\rho(S_i, S_j)$ оценки S_i носителя S_j взят объем $\mu(S_i \cap S_j)$ скрытой информации об S_j, которую несет в себе носитель S_i. Поскольку на практике норма помехи точно не известна, предполагаемый уровень помех во всех примерах завышен приблизительно в 1,5 раза по отношению к фактическому.

В каждом примере P_k множество допустимых решений $Q_k = \{S_i^{(k)}\}_{i=1}^{n(k)}$ построено с помощью математически бесхитростного, но эффективного, в силу своей геофизической направленности, монтажного метода В.Н. Страхова [21], которому посвящено достаточно большое число публикаций. По принятой классификации монтажный метод следует отнести к прямым методам решения условно-экстремальных задач, которые не требуют вычисления производных минимизируемой функции, отчего для математиков он, скорее всего, не интересен (негде «развернуться»), да и модель источников поля в виде конгруэнтных простых геометрических фигур не выглядит «солидно». Казалось бы, почему не воспользоваться более «респектабельной» моделью возмущающего объекта в виде произвольного однородного многогранника, тем более, когда имеются эффективные алгоритмы аналитического решения прямой задачи. Но мешает «самая малость»: многогранник однозначно не определяется набором координат своих вершин, что препятствует созданию *формализованных* итерационных методов решения обратной задачи рудного типа в этом классе источников поля. В итоге большинство примеров применения классических методов решения нелинейной обратной задачи гравиразведки, по существу, ограничиваются структурными обратными задачами.

Манипулируя нулевыми приближениями, число $n(k)$ допустимых решений $S_i^{(k)}$, удалось довести в среднем по N вариантам до 190. В множества Q_k включаются и носители $\widehat{S}_k$; на равных с другими они могут претендовать на роль истинного решения.

Теперь о том, какую нагрузку может нести модельный пример. Мы уже приводили, как нам кажется, убедительные доводы в пользу того, что оценивать эффективность алгоритма решения обратной задачи по точности приближенного решения, а тем более сравнивать по ней эффективности конкурирующих алгоритмов, неправомерно. Решение S^* обратной задачи по любому методу случайно настолько, насколько случайна выборка помех в измерениях гравитационного поля. Скажем более жестко: если руководствоваться идеей объективизации разрешающих способностей гравиразведки по результатам решения обратной задачи, то использование в этих целях точности $\rho(S^*, \widehat{S})$ единичного приближенного решения S^* является профанацией такой идеи. Мы полагаем, что в нашем случае основная задача модельных расчетов состоит в том, чтобы закрепить у читателя представление об условности оптимальности, если ее понимать в глобальном смысле, и о необходимости и целесообразности работы с локальными критериями оптимальности.

Прежде всего, обратим внимание (табл. 1, рис. 3 и 4) на устойчивость оценок выигрыша (потерь), отвечающих оптимальным решениям обратной задачи по всем четырем критериям – Лапласа (L), Вальда (W), Сэвиджа (C) и Гурвица (G). Это выражается в том, что средние значения выигрыша (потерь) существенно превосходят соответствующие среднеквадратические отклонения, и даже абсолютный разброс, характеризуемый минимальным и максимальным значениями выигрыша (потерь) среди всех N примеров P_k, не выглядит столь уж внушительным. По показателю качества ρ наиболее наглядно сравнимы критерии Лапласа и Вальда. По их значениям абсолютное превосходство заведомо за критерием Лапласа (что, собственно, и подтверждают результаты, приведенные в табл. 1), но это, понятно, ни в коей мере не говорит в пользу критерия Лапласа – значения ρ, достигнутые на локально оптимальных решениях по двум названным критериям, отвечают за оценки *различных* свойств оцениваемого решения $\widehat{S}_k$. С учетом того, что во всех примерах $\mu(\widehat{S}_k)$ = 0,5 км^2, есть возможность содержательно прокомментировать порознь каждое числовое значение, внесенное в табл. 1. Так, среднее значение 0,4 км^2 выигрыша ρ по критерию Лапласа означает, что локально оптимальные решения обратной задачи – носители S^*_k – в среднем на 80% совпадают с истинными носителями $\widehat{S}_k$.

Алгоритм отвечает за свой статус (локальной) оптимальности по критерию, который лежит в его основе, и если алгоритм A_2 претендует на превосходство над алгоритмом A_1, то сравнение надо вести по «правилам игры» последнего. Пусть $S^*_{i(k)} \in Q_k$ – решение, которое оказалось оптимальным по критерию B, и значение $\Phi_{A,B}(k)$ выигрыша (потерь) от принятия его в качестве результата интерпретации оценивается по критерию A, а $\overline{\Phi}_{A,B}$ – среднее этих значений по всем N примерам P_k. В табл. 2 дана сравнительная характеристика результатов интерпретации по критериям Лапласа (L), Вальда (W), Сэвиджа (C) и Гурвица (G) (при α = 0,5). Как и должно быть, в первых двух и четвертой строках таблицы у диагональных элементов $\overline{\Phi}_{A,A}$ наибольшие значения, а в третьей строке – наименьшее. В каждой строке разности $\overline{\Phi}_{A,A} - \overline{\Phi}_{A,B}$ недиагональных элементов с диагональным суть различие между средним по N вариантам выигрышем (потерями) от принятия решений, оптимальных по двум критериям (A и B), тогда как сопоставление этих решений идет по критерию оптимальности одного из них (A). Соответственно, разности $\overline{\Phi}_{A,A} - \overline{\Phi}_{B,A}$ в каждом столбце таблицы между диагональным элементом и остальными дают представление о том, как изменяются характеристики решения при смене критерия оптимальности, по которым оцениваются эти решения.

В общем случае локально оптимальные решения могут заметно разниться между собой, хотя не исключены ситуации (это все определяется спецификой выборки помех в измерениях поля), когда отдельные решения совпадут между собой. На рис. 5 приведены локально оптимальные решения обратной задачи, полученные в одном из примеров P_k.

Заключение

При выработке стратегии поведения в сложных проблемных ситуациях, в частности, тех, что возникают в задачах природопользования [25], широко используются критерии общей теории принятия решений. Можно сказать, что они нацелены на определенные признаки локальной оптимальности выбираемого решения. В данной статье мы показали, что эти критерии удачно вписываются в проблематику обратных задач гравиразведки и с пользой могут быть модифицированы в соответствии со спецификой наших задач.

Нет ничего удивительного, что в рамках геофизической теории возникают идеи и подходы к решению обратных задач, которые почему-то не попали в поле зрения профессиональных математиков

Таблица 1

Статистические характеристики разброса значений выигрыша (или потерь) ρ при принятии решения по различным критериям выбора (по результатам решения N = 100 модельных примеров)

Критерий	Минимум	Максимум	Среднее	Среднеквадратическое отклонение
L	0,372	0,417	0,400	0,009
W	0,170	0,280	0,240	0,021
C	0,250	0,390	0,305	0,027
G	0,360	0,435	0,395	0,015

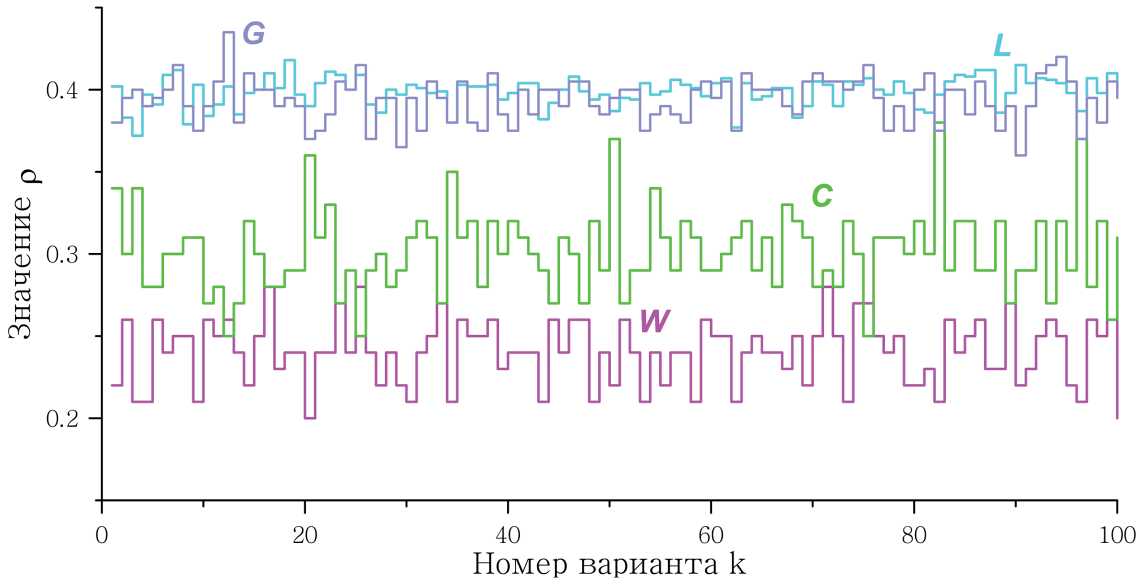

Рис. 3. Графики значений ρ для локально оптимальных решений, полученных по критериям Лапласа (L), Вальда (W), Сэвиджа (C), Гурвица (G) в N = 100 модельных примерах

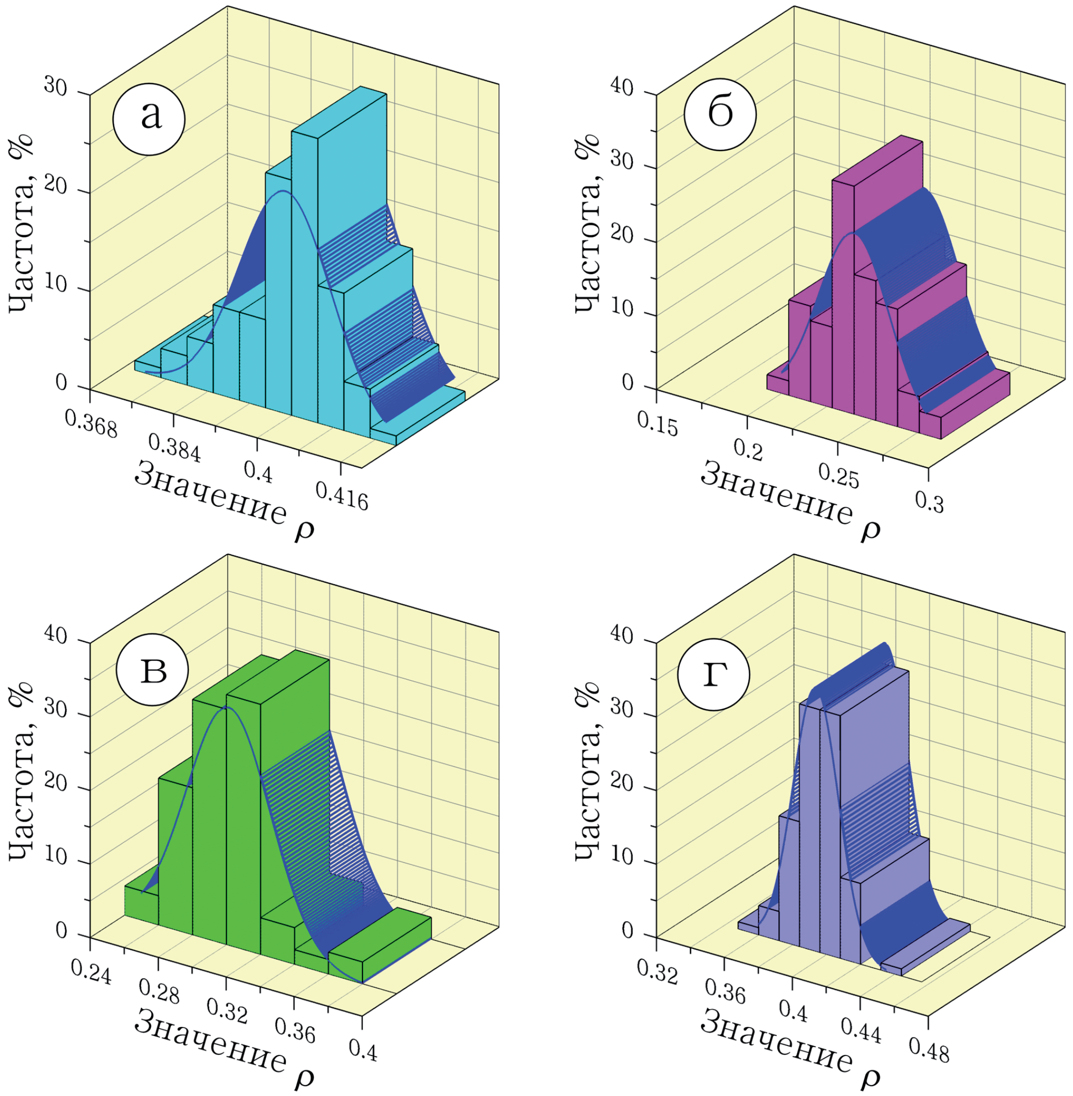

Рис. 4. Гистограммы значения ρ по критериям Лапласа (а), Вальда (б), Сэвиджа (в), Гурвица (г), построенные по результатам решения N = 100 модельных примеров.
Примечание: синий цвет – аппроксимация гистограммы кривой Гаусса

Таблица 2

Характеристика результатов интерпретации с использованием разных критериев

Критерий оценивания решения	Критерий принятия решения			
	L	***W***	***C***	***G***
L	0,400	0,376	0,372	0,336
W	0,216	0,240	0,217	0,188
C	0,335	0,333	0,305	0,362
G	0,358	0,370	0,359	0,395

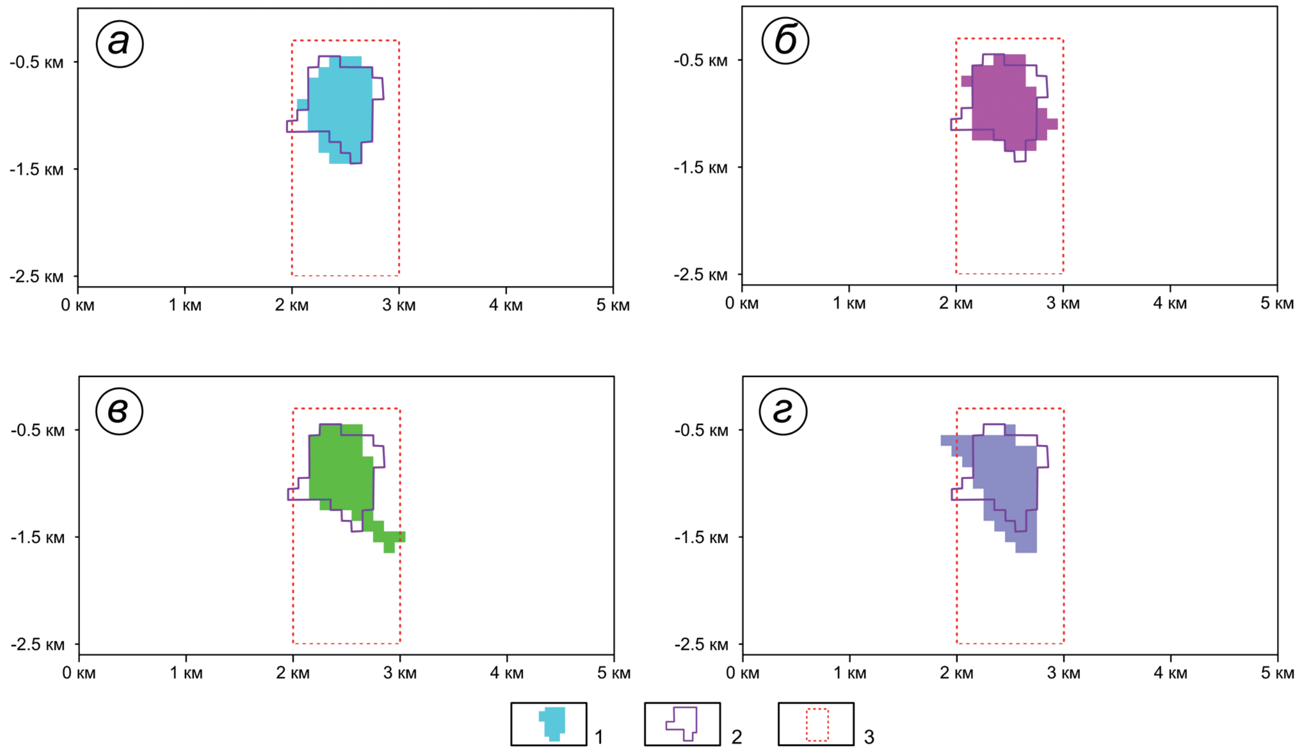

Рис. 5. Результаты интерпретации аномалии силы тяжести в примере P_{50} по критериям Лапласа (а), Вальда (б), Сэвиджа (в), Гурвица (г): 1 – полученное решение обратной задачи; 2 – «истинный» источник поля; 3 – область поиска допустимых решений обратной задачи

и, прежде всего, специалистов в области некорректных обратных задач. Ситуация предельно проста. Многие объективно существующие проблемы, возникающие в процессе построения технологической цепочки извлечения информации из данных гравиразведки, кажутся для этой категории специалистов излишними (на фоне виртуальной сходимости приближенных решений) и малозначащими (по шкале приоритетов, которые установлены в их научной среде).

Многие из известных подходов, альтернативных классической теории решения некорректных обратных задач математической физики (в том числе и затронутые в настоящей статье), могли бы появиться значительно раньше. Авторы убеждены, что такое не случилось во многом благодаря завышенной оценке геофизиками реальных возможностей этой теории. Теории, построенной в соответствии со всеми математическими канонами, внесшей неоценимый вклад в изучение гносеологических проблем *принципиальной* познаваемости действительности по ее косвенным проявлениям, но слишком оторванной от реалий и нужд геофизической практики.

Ключевые слова: гравиразведка, обратная задача, информация, допустимые варианты интерпретации, критерии выбора, условия неопределенности, условия риска, локально оптимальные решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балк П.И. О надежности результатов количественной интерпретации гравитационных аномалий // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1980. – № 6. – С. 65-83.
2. Балк П.И. Несколько контрпримеров к стереотипам в теории интерпретации потенциальных полей // Геоинформатика. – 2013. – № 3. – С. 33-40.
3. Балк П.И. Спорные положения методологии современной теории интерпретации гравитационных аномалий и пути разрешения сложившихся противоречий // Физика Земли. – 2014. – № 2. – С. 41-52.
4. Балк П.И. Скрытая эквивалентность алгоритмов решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии // Геоинформатика. – 2015. – № 3. – С. 26-31.
5. Балк П.И., Долгаль А.С. Синтез преимуществ функционально-аналитического и вероятностно-статистического подходов в смешанных алгоритмах решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии // Геоинформатика. – 2011. – № 1. – С. 33-42.
6. Балк П.И., Долгаль А.С. Детерминистские модели интерпретации для оптимизации местоположения и глубин заложения скважин при заверке гравитационных аномалий // Физика Земли. – 2015. – № 1. – С. 98-111.
7. Балк П.И., Долгаль А.С., Балк Т.В., Христенко Л.А. Согласование конкурирующих вариантов интерпретации гравитационных аномалий методом минимизации эмпирического риска // Геоинформатика. – 2015. – № 4. – С. 24-35.
8. Балк П.И., Долгаль А.С., Балк Т.В., Христенко Л.А. Совместное использование различных методов решения обратных задач гравиразведки для повышения информативности результатов интерпретации // Геофизический журнал. – 2015 – Т. 37. – № 4. – С. 133-150.
9. Балк П.И., Долгаль А.С., Мичурин А.В. Смешанный вероятностно-детерминистский подход к интерпретации данных гравиразведки, магниторазведки и электроразведки // Доклады РАН. – 2011. – Т. 438. – № 4. – С. 532-537.
10. Балк Т.В. Об оценке надежности результатов количественной интерпретации гравитационных аномалий по методу призм при переменной плотности // Геология и геофизика. – 1981. – № 4. – С. 119-125.
11. Балк Т.В., Новоселова М.Р., Балк Т.В., Турутанов Е.Х. О точности определения нижней границы геологического объекта по гравиметрическим данным // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1988. – № 3. – С. 81-86.
12. Долгаль А.С., Шархимуллин А.Ф. Повышение точности интерпретации моногеничных гравитационных аномалий // Геоинформатика. – 2011. – № 4. – С. 49-56.
13. Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. – Екатеринбург : Наука, 1993. – 263 с.
14. Канторович Л. В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сибирский математический журнал. – 1962. – Т. 3. – № 5. – С. 701-709.
15. Кудрявцев А.А. Санкт-Петербургский парадокс и его значение для экономической теории // Вестник С.-Петерб. ун-та. – 2013. – Вып. 3. – С. 41-55.
16. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений. – М. : Логос, 2000.
17. Райфа Г. Анализ решений. – М. : Наука, 1977. – 408 с.
18. Страхов В.Н. Геофизика и математика // Физика Земли. – 1995. – № 12. – С. 4-23.
19. Страхов В.Н. Разрушение существующего стереотипа мышления – главнейшая проблема в равитии теории и практики интерпретации потенциальных полей в начале XXI века // Доклады РАН. – 2000. – Т. 373. – № 3. – С. 395-399.
20. Страхов В.Н. Главнейшая задача в теории и практике интерпретации потенциальных полей в начале XXI века – разрушение господствующего стереотипа мышления // Геофизика. – 2001. – № 1. – С. 3-18.
21. Страхов В.Н., Лапина М.И. Монтажный метод решения обратной задачи гравиметрии // Доклады АН СССР. – 1976. – Т. 227. – № 2. – С. 344-347.
22. Тихонов А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // ДАН СССР. – 1963. – Т. 151. – № 1. – С. 49-52.
23. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН СССР. – 1963. – Т. 151. – № 3. – С. 501-504.
24. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М. : Наука, 1979. – 284 с.
25. Черемисина Е.Н., Никитин А.А. Системный анализ в природопользовании. – М. : Изд-во ВНИИгеосистем, 2014. – 117 с.
26. Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений. – СПб. : Изд-во БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.
27. Черноусько Ф.Л. Оптимальные гарантированные оценки неопределенностей с помощью эллипсоидов. I-III // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1980. – № 3-5.