Геоинформатика. 2021. № 4. С. 35–42.
Geoinformatika. 2021;(4):35–42.

Применение ГИС-технологий

Научная статья
УДК 550.838
https://doi.org/10.47148/

Об основных этапах развития теории аналитического продолжения геофизических полей и возможных перспективах использования в современных геоинформационных системах

© 2021 г. — Константин Михайлович Ермохин
Санкт-Петербургский филиал Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова Российской академии наук (СПбФ ИЗМИРАН); Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. Рассмотрена ретроспектива развития методов аналитического продолжения потенциальных геофизических полей. Предложены возможности развития этих методов в различных направлениях. Приведен пример практического применения метода в сложных геолого-геофизических условиях.

Ключевые слова: ***аналитическое продолжение, аппроксимационный метод, цепная дробь***

Для цитирования: Ермохин К.М. Об основных этапах развития теории аналитического продолжения геофизических полей и возможных перспективах использования в современных геоинформационных системах // Геоинформатика. — 2021. — № 4. — С. 35–42. https://doi.org/10.47148/1609-364X-2021-4-35-42.

Application of GIS-technologies

Original article

About the main stages in the development of the theory of analytic continuation geophysical fields and possible prospects of use in modern geographic information systems

© 2021 — Konstantin M. Ermokhin
Saint-Petersburg branch of Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere and Radio Wave Propagation named after Nikolay Pushkov of the Russian Academy of Sciences (StPB of IZMIRAN), Saint-Petersburg, Russia

Abstract. The retrospective development of methods of analytical continuation of potential geophysical fields is considered. The possibilities of developing these methods in various directions are proposed. An example of the practical application of the method in complex geological and geophysical conditions is given

Key words: *analytical continuation, approximation method, continued fraction*

For citation: Ermokhin K.M. About the main stages in the development of the theory of analytic continuation geophysical fields and possible prospects of use in modern geographic information systems. *Geoinformatika.* 2021;(4):35–42. https://doi.org/10.47148/1609-364X-2021-4-35-42. In Russ.

Введение

Аналитическое продолжение геофизических полей — один из важных инструментов интерпретации данных измерений как завершающей стадии геоинформационных построений и представляет собой эффективный вариант решения обратной задачи. В отличие от различных методов трансформаций полей, базирующихся на интуитивных соображениях, имеющих целью подчеркнуть какие-либо их особенности, аналитическое продолжение основывается на строгой математической базе и позволяет вычислять значения поля в точках пространства выше и ниже уровня измерений.

Один из основателей советской школы геомагнетизма, Б.М. Яновский отмечал, «что из всех существующих методов интерпретации магнитных и гравитационных аномалий наиболее перспективным должен быть метод аналитического продолжения» [18].

Задача эта имеет две стороны: продолжение вверх (в воздух), где принципиально нет аномалеобразующих объектов и вниз, где находятся объекты поиска геофизики. Эти две задачи качественно различаются. Задача продолжения вверх является корректной и теоретически решается интегралом Пуассона, с оговоркой, что близко к краям профиля погрешность вычислений сильно возрастает ввиду его ограниченности. Практическая ценность такого решения весьма ограничена, это, фактически сглаживающий фильтр. Продолжение полей в нижнее полупространство гораздо более привлекательно как именно поиск аномалеобразующих объектов.

Постановка задачи и первые попытки ее решения

Вычисление напряженности магнитного поля ниже поверхности наблюдений с целью определения размеров и глубины залегания аномалиеобразующих объектов интересовало геофизиков России много лет назад. Еще в начале 30-х годов К.Б. Вейнберг вычислил поле ΔT ниже плоскости наблюдения по методу, предложенному П.Т. Пасальским. Несмотря на погрешности измерений вычисления были достаточно удовлетворительными, но громоздкий способ расчетов в то время не нашел последователей [11]. Впервые в геофизике задача аналитического продолжения вниз формально была поставлена Г. Рейнбоу в 1933г. [1]. Он же предложил первое ее простейшее решение:

$$U(0,h)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}U(nh,0)\frac{(-1)^n(e^{\pi}-1)}{1+n^2}, \qquad (1)$$

где $U(x, z)$ — потенциал поля, h — шаг по профилю.

Целью вычислений было возможно большее приближение значений расчетного поля к источникам аномалий для контрастирования аномалий. При применении формулы Рейнбоу на основе анализа погрешностей был сделан вывод о том, что расчеты дают удовлетворительные результаты, если глубина пересчета не превосходит половины глубины залегания источника, что позднее подтвердилось на практике. Следует отметить, что бесконечные пределы суммирования, применямые в формуле Рейнбоу, автоматически ведут к росту погрешности на краях профиля. Строгое обоснование формулы Рейнбоу принадлежит С.В. Шалаеву [1].

Следующим шагом в этом направлении была формула самого С.В. Шалаева:

$$U(0,h)+U(0,-h)=k_0U(0,0)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}k_n[U(nh,0)+U(-nh,0)], \qquad (2)$$

где k_n — эмпирические коэффициенты [1]. Введение k_n — попытка устранения бесконечного предела суммирования с помощью гасящих коэффициентов.

Способ аналитического продолжения, предложенный Б.А. Андреевым, основывался на решении уравнения Фредгольма I-рода и предназначался для определения положения особых точек поля ближайших к поверхности, что, очевидно, имеет ограниченный интерес [18].

Неординарной попыткой решения задачи стал метод полного градиента Березкина В.М. для гравитационного поля [2]. Суть его состоит в следующем: поле по профилю представляется синус-рядом Фурье:

$$\Delta g(x,z)=\sum_{n=1}^{N}B_n\sin\frac{\pi nz}{L}e^{\frac{\pi nz}{L}}, \qquad (3)$$

где L — длина профиля, N — число точек на профиле. Затем вычисляется модуль вектора из производных ряда по x и z, нормированный на среднее значение по профилю на каждой заданной глубине, что и принимается как результат пересчета поля вниз. В процессе испытаний было выяснено, что метод относительно эффективен для обнаружения аномальных объектов на глубине порядка 1/10 длины профиля L. В прямом смысле этод метод аналитическим продолжением не является, поскольку аналитичность результирующей функции не доказана. Кроме того, нет свидетельств о его эффективности на множественных аномалиях (хотя бы двойных). Тем не менее, результаты применения этого метода в наше время итальянскими исследователями подтверждают выводы автора метода [20].

Дальнейшее развитие теории было предпринято В.Н. Страховым [13]. Им был предложен аппроксимационный метод аналитического продолжения гравитационного поля. В нем поле аппроксимируется рядом аналитических функций:

$$U(x)\approx\sum_{n=1}^{N}c_n\varphi_n(x), \qquad (4)$$

Затем вещественная переменная x заменяется комплексной x-iz (z — глубина) и производится расчет $Re(U(x+iz))$ по профилям на заданных глубинах, т.к. вещественная часть аналитической функции комплексной переменной автоматически является лапласовой функцией.

Такой подход гарантирует аналитичность результата, но не сходимость к искомой функции. Результатом исследования явилось обнаружение эффекта «распадения поля» с приближением к источнику аномалии и констатирована невозможность продолжения поля ниже ближайшей к поверхности особой точки поля.

По факту на рис. 1 продемонстрировано не «распадение поля» (сильная осцилляция при приближении к источнику), а расходимость примененного алгоритма, но официальная констатация этого эффекта академиком В.Н. Страховым фактически надолго поставила крест на самом методе. Причиной была сильная неустойчивость линейных вычислительных алгоритмов даже в отсутствие помех.

В системе Oazis Montaj ведущей мировой фирмы в области геоинформатики GEOSOFT имеется модуль расчета аналитического продолжения геофизических полей вниз. Результаты его работы полностью подтверждают выводы В.Н. Страхова: «Пересчет в нижнее полупространство используется для усиления аномалий от источников на глубине, путем фактического перемещения плоскости измерения ближе к источникам… теоретически произвести пересчет через источник невозможно» [21].

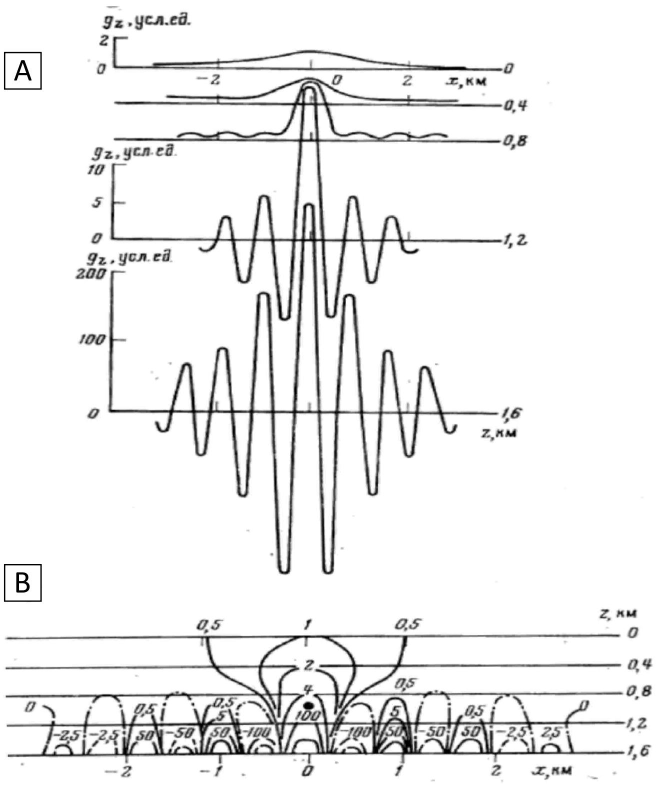
Дальнейшее развитие метода показало, что не все так безнадежно.

На основании вышеизложенного, следует отметить, что:

1. Наличие у искомых функций сингулярностей не допускает возможности их прямого вычисления как отрезков степенных рядов или рядов по лапласовым функциям ввиду того, что они могут иметь

Рис. 1. Эффект «распадения поля» при подходе к точечному источнику поля на глубине 1 км. и прохождению сквозь него (А — графики поля на различных глубинах, В — изолинии поля в разрезе)

Fig. 1. Effect of "field decay" when approaching a point source of the field at a depth of 1 km. and passing through it (A — graphs of the field at different depths, B — isolines of the field in the section)



реальные максимумы только на границе области поиска, что очевидно не отвечает поставленной задаче интерпретации наблюденного поля. Объектом поиска в геофизике как раз являются сингулярности, которые приурочены к источникам аномалий.

2. Рассмотренные методы относятся к потенциальным полям. Однако, например, постоянное магнитное поле, будучи само по себе потенциальным, измеряется в настоящее время в 95% случаев как модуль вектора (протонными и квантовыми магнитометрами) и, по сути, потенциальным не является, а выделить из него компоненты невозможно. В случае гравитационного поля также имеется косвенное препятствие, т.к. в данные измерений вносятся поправки (Буге или Фая), содержащие функцию, описывающую рельеф по профилю измерений, которая вовсе не обязана быть лапласовой и фактически «портит» измеренные данные.

3. Вышеперечисленные методы опираются исключительно на уравнение Лапласа, что совсем не обязательно. Есть более общая теорема Коши – Ковалевской об аналитичности решений уравнений математической физики. Упрощенная формулировка ее выглядит так: решения уравнений в частных производных являются аналитическими функциями (в смысле Вейерштрасса) в окрестности граничных условий (аналитической в смысле Вейерштрасса является функция, представимая степенным рядом с неотрицательными показателями). Это позволяет ставить и решать задачу в более общей постановке.

4. «Методы аналитического продолжения аномалий по роду применяемого математического аппарата весьма разнообразны… и их сравнительные достоинства могут быть оценены лишь по численным результатам, полученным для конкретных примеров» [12].

Множество теоретических работ по направлению, родственному аналитическому продолжению (миграция полей) опубликовано М.С. Ждановым [9].

Существование и единственность решения задачи аналитического продолжения гарантируются соответствующими теоремами теории функций комплексной переменной. Для корректного решения недоставало устойчивости к погрешностям измерения, что удалось преодолеть в последующих исследованиях.

Наиболее близким к реальности в математическом смысле является представление наблюдаемых в геофизике функций в виде рациональных дробей. Они имеют особенности (полюсы) в нижнем полупространстве, соответствующие аномалеобразующим объектам и их характер лучше соответствует строению поля в разрезе. Используем при этом аппроксимационный подход [13].

По существу, решение обратной задачи есть аппроксимация наблюденной на поверхности функции, и определяется оно, удачным (или нет), выбором аппроксимационной конструкции.

Суть метода состоит в следующем.

Измеренная по профилю функция $f(x)$, $a \le x \le b$, представляется рядом по многочленам Чебышёва первого рода (после приведения аргумента к отрезку [-1,1])

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k(x), \tag{5}$$

где $T_k(x)$ — многочлены Чебышёва первого рода, c_k — коэффициенты. При замене вещественной переменной на комплексную этот ряд расходится как геометрическая прогрессия со знаменателем больше единицы.

Для суммирования преобразуем ряд в цепную дробь. Учитывая, что [14]

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) = \mathrm{Re}(\exp(in \arccos(x))),$$

обозначим $Y = \exp(i \arccos(x)) = x + i\sqrt{1-x^2}$ и заменим вещественную переменную x комплексной $y = x - iz$ (в соответствии с идеей В.Н. Страхова), где z — глубина. Ряд Чебышёва для $f(x)$ тогда перепишется в виде степенного:

$$f(x) = \mathrm{Re}\sum_{k=0}^{\infty} c_k Y^k,$$

и в дальнейшем будем вычислять функцию

$$F(Y)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k Y^k, \tag{6}$$

вещественная часть которой совпадает с наблюденной на профиле измерений функцией, а сама является ее мероморфным продолжением.

Соответствующая ряду (6) цепная дробь строится на основе алгоритма академика Императорской Академии Наук В.И. Висковатова, разработанного им еще в 1805 г. [22, 15]:

$$F(Y)=\cfrac{a_0 Y^{k_0}}{1+\cfrac{a_1 Y^{k_1}}{1+\cfrac{a_2 Y^{k_2}}{1+\ldots}}}, \tag{7}$$

где k_j — целые положительные числа, a_j — вещественные коэффициенты. Вычисления самой дроби осуществляются по стандартным формулам [5]. Алгоритм устойчив и обладает свойством саморегуляризации [22].

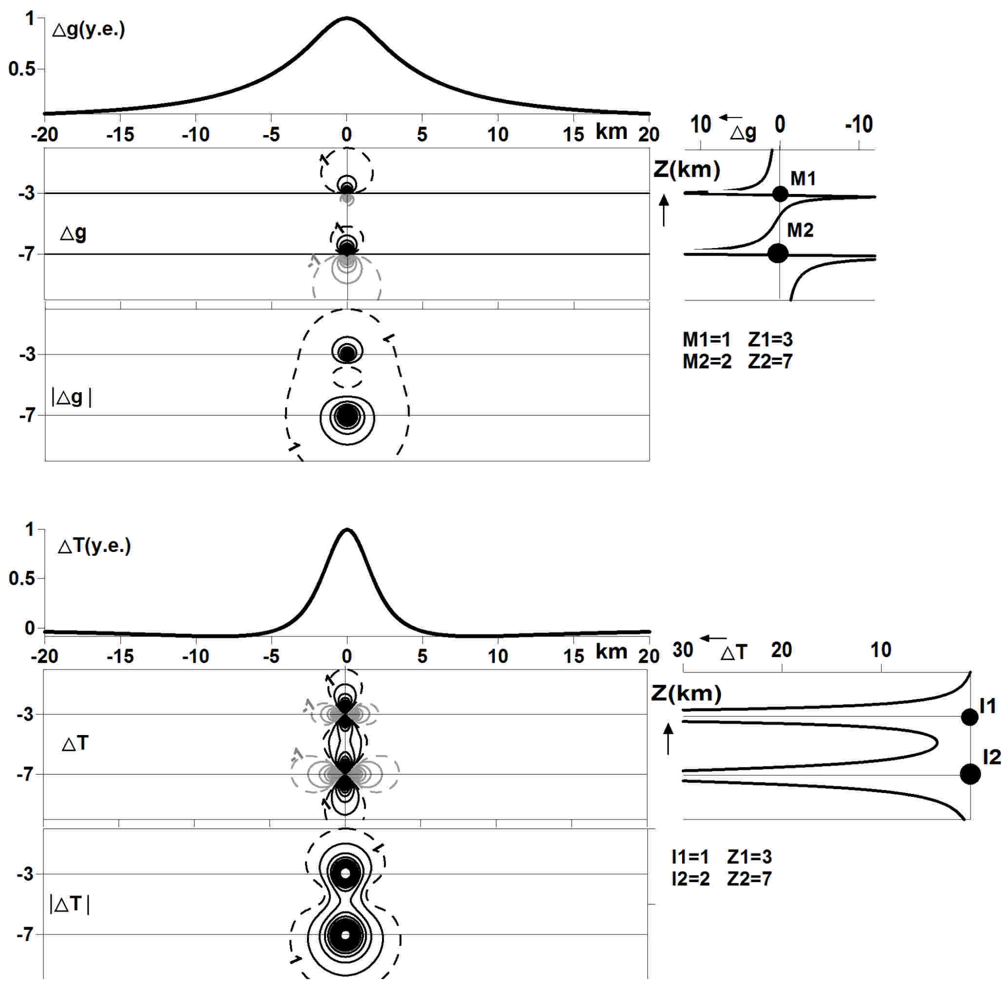
Кардинальным отличием от вышеперечисленных методов является единое представление искомой функции цепной дробью во всей области неопределенности, а не послойный пересчет разностными методами с накоплением погрешностей с ростом глубины.

Цепные дроби известны еще со времен Евклида, но методичное исследование в области их аналитики началось с работ Эйлера и Бернулли. В дальнейшем метод развивался в трудах Чебышёва, Маркова, Перрона, Хованского, Трона, Гончара и др. Однако, интерес к цепным дробям у геофизиков, к сожалению, незначителен ввиду отсутствия в современных курсах высшей математики в университетах этого раздела, по причине широкого распространения линейных методов и теории регуляризации.

Вычислительные аспекты алгоритма на основе цепных дробей и некоторые примеры применения для геофизических полей подробно описаны в работах [7, 15]. Одна из возможностей алгоритма представлена на рис. 2. где приведены вертикальные

Рис. 2. Аналитическое продолжение гравитационного (Δg) и магнитного поля ΔT от двух горизонтальных цилиндров с массой и намагничиванием 1 и 2 у.е. на глубинах 3 и 7 км

Fig. 2. Analytical continuation of the gravitational and magnetic field from two horizontal cylinders with mass and magnetization of 1 and 2 conventional units. at depths of 3 and 7 km



разрезы функций аналитического продолжения Δg (гравитационного поля) и ΔT (магнитного поля) двух горизонтальных круговых цилиндров массы и намагничивания 1 и 2 у.е. на глубине 3 и 7 км (намагничивание вертикальное), расположенных строго один под другим. Исходными являются графики Δg и ΔT на поверхности (Z=0), нормированные к единице. Выделенные полюсы Δg — простые (порядка 1), полюсы ΔT — двойные (порядка 2), на что указывает конфигурация изолиний Δg и ΔT. Поле продолжено через две массы, находящиеся на одной вертикальной оси друг под другом (предельно сложный случай взаимного расположения — полная невозможность *визуального* обнаружения двух объектов) [6].

Вертикальные разрезы (слева) вверху отображают вещественную часть аналитического продолжения, внизу — модуль. Справа показано положение источников поля и графики аналитического продолжения по оси, проходящей через них. Пример на рис. 2 опровергает тезис о «распадении поля» при приближении к источнику аномалии, но более того, показывает возможность продолжения поля вглубь–сквозь него, до следующего источника и ниже.

Еще одной возможностью применения метода аналитического продолжения поля цепной дробью является определение источников аномалий глобального магнитного поля внутри Земли [8].

Как известно [17], глобальное магнитное поле Земли описывается рядом Гаусса–Лежандра

$$U(r,\theta,\lambda)=R_E\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R_E}{r}\right)^n\sum_{m=0}^{n}\left(g_n^m\cos(m\lambda)+\right.$$

$$\left.+h_n^m\sin(m\lambda)\right)P_n^m(\cos(\theta)), \qquad (8)$$

где $U(r,\theta,\lambda)$ — потенциал магнитного поля, r — расстояние от центра Земли, θ — широта (отсчитываемая от северного полюса), λ — долгота от Гринвичского меридиана, R_E — радиус Земли, $P_n^m(\cos(\theta))$ — присоединенные функции Лежандра, g_n^m, h_n^m — коэффициенты (общедоступные в модели IGRF).

Для моделирования положим R_E=1 и расположим источники поля как показано на рис. 3, где величина магнитных масс показана со знаками +–, а их координаты — без знака, поскольку очевидно, что магнитные массы в Земле не точечные диполи, как представлено в работе [10], а распределены в пространстве.

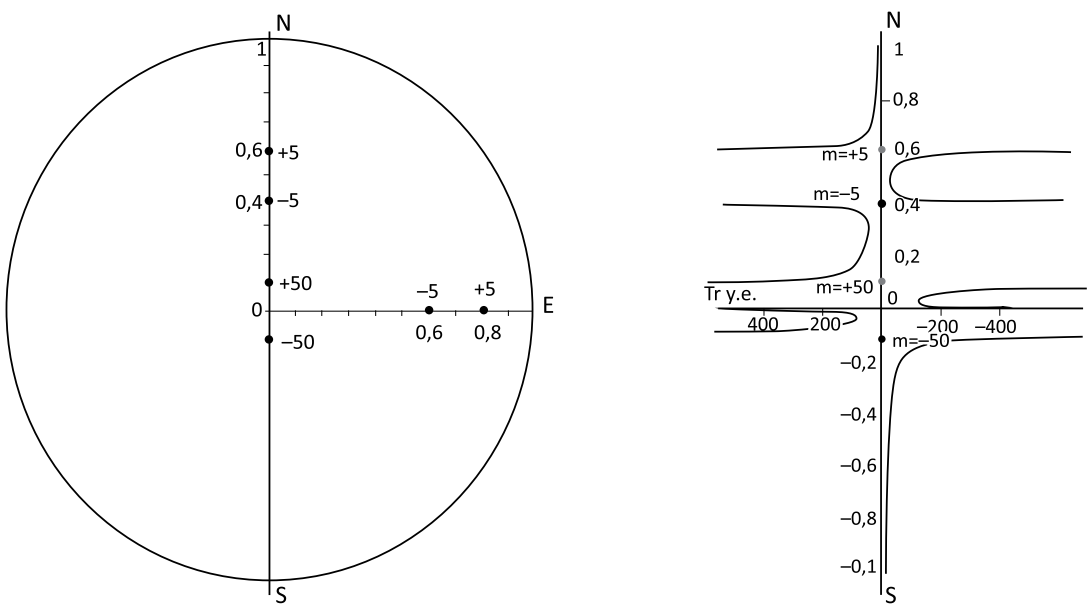
Ряд (9) является, по существу, разложением поля по $1/r$. Теоретически он сходится при r>1. Однако он может быть использован и для r<1. Но до какой глубины? Для цепной дроби этого вопроса нет.

Слева представлено расположение и величина магнитных масс, справа — график радиальной составляющей магнитного поля T по оси SN (южный–северный полюс). Как видно, наличие дополнительных источников поля на экваториальной оси не мешает определению положения источников на оси север–юг.

Перспективным направлением исследований представляется также использование интерполяционной дроби Тиле с примерами успешного применения [19]:

Рис.3. Определение положения магнитных масс внутри шара

Fig. 3. Determination of the position of magnetic masses inside the sphere



$$F(x)=\cfrac{F_1}{1+\cfrac{a_1(x-x_1)}{1+\cfrac{a_2(x-x_2)}{1+\ldots}}}, \qquad (9)$$

где функция F задана в точках $x_i\, i=1, 2, \ldots, N$ по прямому профилю, а коэффициенты a_i считаются по рекуррентным формулам. Это принципиально позволяет построить дробь от двух и трех переменных.

Данная статья посвящена теоретическим аспектам развития теории аналитического продолжения геофизических полей как важного раздела геоинформационных технологий. Примеры и детали практического применения метода аналитического продолжения геофизических полей в нижнее полупространство с помощью цепных дробей представлены в ряде цитированных источников, в частности [7, 3, 8] и др.

Все три скважины были заданы по результатам интерактивного решения обратной задачи путем подбора (до расчета методом аналитического продолжения).

Очевидна результативность метода при наличии многочисленных максимумов поляризации в наблюденном поле. Опирается этот результат на суперустойчивость (саморегуляризацию алгоритма) показаную в работе [22].

Заключение

Перспективой дальнейшего развития метода аналитического продолжения является его 3D-обобщение для решения поисковых задач на локальных площадях.

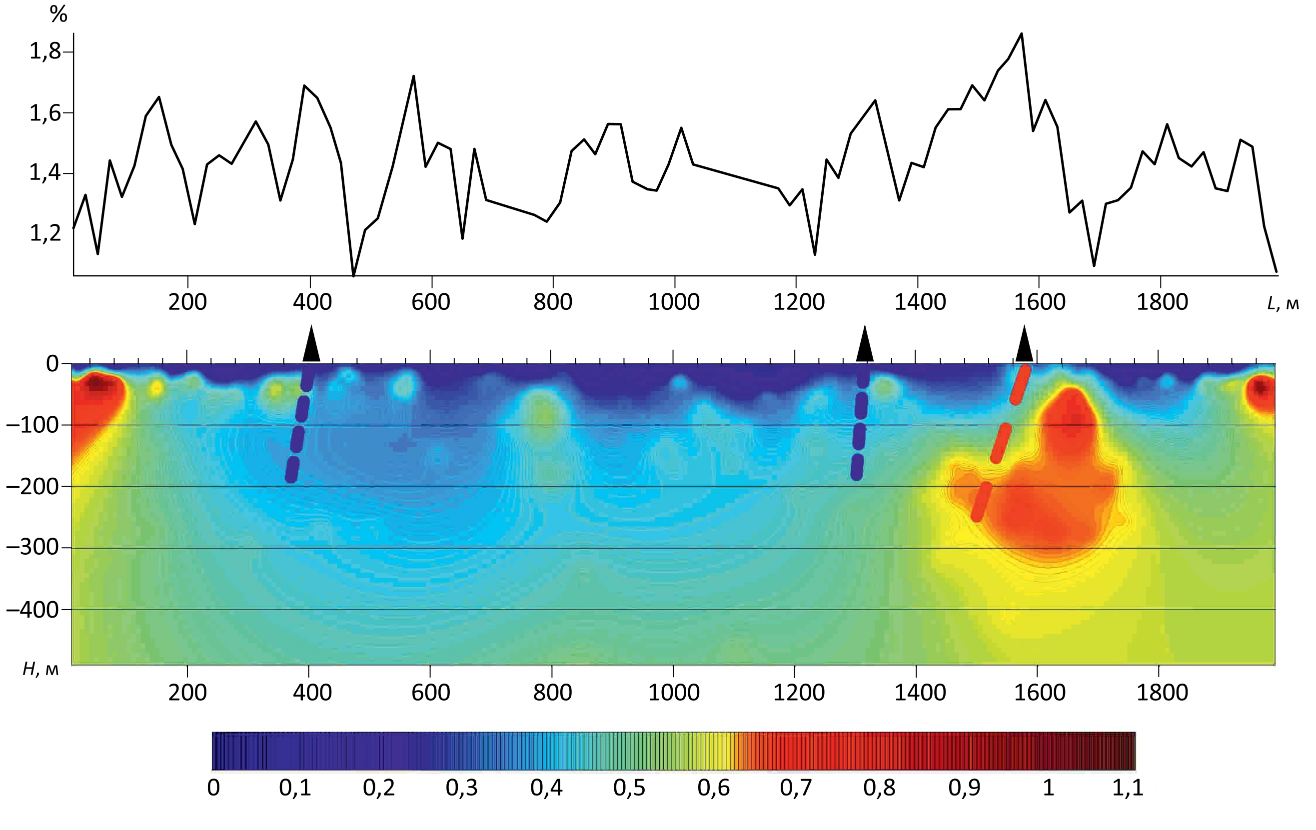
Аналитическое продолжение геофизических полей с неровного рельефа вниз также представляет значительный практический интерес и является перспективным направлением исследований для геоинформационных технологий.

Следует отметить, что «Важнейшим объектом исследования геофизики является магнитное поле Земли. Сегодня глобально распределенные сети обсерваторий позволяют регистрировать характеристики магнитного поля Земли с секундным временным разрешением» [4]. Применение метода цепных дробей может помочь осуществить мониторинг внутреннего строения магнитного поля Земли и, возможно, прогнозировать магнитные, и даже климатические изменения в будущем.

Для геоинформатики существенным является то, что заключительным этапом обработки информации полученной в ходе полевых работ является геолого-геофизическая интерпретация данных измерений, которая может опираться только на результаты решения обратных задач геофизики в том или ином виде, в частности, аналитического продолжения наблюденных полей.

Рис. 4. Результат продолжения поля вызванной поляризации по профилю над рудной залежью в Карелии (красный пунктир — скважина, вскрывшая залежь с сульфидами в интервале 176–246 м, синий пунктир — пустые скважины)

Fig. 4. Result of the continuation of the induced polarization field along the profile over the ore deposit in Karelia (red dotted line — a well that opened a deposit with sulfides in the interval 176–246 m, blue dotted line — empty wells)



Список источников

1. *Андреев Б.А., Клушин И.Г.* Геологическое истолкование гравитационных аномалий. – Л. : Гостоптехиздат, 1962. – 495 с.

2. *Березкин В.М., Киричек М.А., Кунарев А.А.* Применение геофизических методов разведки для прямых поисков месторождений нефти и газа. – М. : Недра, 1978. – 223 с.

3. *Гайсин Р.М., Набатов В.В.* Выделение аномальных зон в подземной электроразведке методом аналитического продолжения // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2018. – № 6. – С. 107–112. DOI: 10.25018/0236-1493-2018-6-0-107-112.

4. *Гвишиани А.Д., Кафтан В.И., Красноперов Р.И., Татаринов В.Н., Вавилин Е.В.* Геоинформатика и системный анализ в геофизике и геодинамике // Физика Земли. – 2019. – № 1. – С. 42–60. DOI: 10.31857/S0002-33372019142-60.

5. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. – М. : Мир, 1985. – 414 с.

6. *Ермохин К.М.* Аналитическое продолжение гравимагнитных полей через массы // Доклады Академии наук. – 2017. – Т. 476. – № 1. – С. 104–107. DOI: 10.7868/S0869565217250223.

7. *Ермохин К.М.* Технология построения разрезов методом аналитического продолжения геофизических полей // Геоинформатика. – 2010. –№ 2. – С. 51–60.

8. *Ермохин К.М., Солдатов В.А.* Об определении источников и внутренней структуры магнитного поля Земли на основе аналитического продолжения методом цепных дробей // Геоинформатика. – 2020. – № 3. – С. 20–28. DOI: 10.47148/1609-364X-2020-3-20-28.

9. *Жданов М.С.* Теория обратных задач и регуляризации в геофизике. – М. : Научный мир, 2007. – 710 с.

10. *Ладынин А.В.* Дипольные источники главного геомагнитного поля // Геология и геофизика. – 2014. – Т. 55. – № 4. – С. 634–649.

11. *Логачев А.А., Захаров В.П.* Магниторазведка. Л. : Недра, 1979. – 351 с.

12. *Маловичко А.К., Костицын В.И., Тарунина О.Л.* Детальная гравиразведка на нефть и газ. – М. : Недра, 1989. – 224 с.

13. *Страхов В.Н.* Аналитическое продолжение потенциальных полей. Особые точки потенциальных полей. Связь особых точек с геометрией возмущающих масс // Гравиразведка: справочник геофизика / под ред. Е.А. Мудрецовой, К.Е. Веселова. – М. : Недра, 1990. – С. 328–340.

14. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. – М. : Наука, 1979. – 415 с.

15. *Хованский А.Н.* Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. – М. : Гостехиздат, 1956. – 203 с.

16. *Шалаев С.В.* Применение в геофизике аналитического продолжения потенциальной функции в нижнюю полуплоскость // Записки Ленинградского Горного института. – 1959. – Т. 36. – Вып. 2. – С. 15–26.

17. *Яновский Б.М.* Земной магнетизм. – 4-е изд. – Л. : Изд-во Ленинградского ун-та, 1978. – 591 с.

18. *Яновский Б.М.* Земной магнетизм. Т. 2. Теоретические основы магнитометрического метода исследования земной коры и геомагнитные измерения. – 3-е изд. – Л. : Изд-во Ленинградского ун-та, 1963. – 463 с.

19. *Binosi D. Schlessinger* Point Method: Theory and Applications [Электронный ресурс] // Continuum Functional Methods for QCD at New Generation Facilities (ECT, Italy. May 7-10, 2019). – Trento: ECT, 2019. – 50 p. – Режим доступа: https://indico.ectstar.eu/event/46/contributions/991/attachments/678/899/DB-spectral.pdf (дата обращения: 10.12.2021).

20. *Fedi M, Florio G.* Downward continuation within the quasi-harmonic region [Электронный ресурс] // EGM International Workshop. Adding new value to Electromagnetic, Gravity and Magnetic Methods for Exploration (Capri, Italy, April 11–14, 2010). – 2010. – 5 p. – Режим доступа: https://www.eageseg.org/data/egm2010/Sessione%20C/Oral%20papers/C_OP_14.pdf (дата обращения: 10.12.2021).

21. *Geosoft.* Oasis Montaj V 7.1. Руководство пользователя. 79 p. 2013.

22. *Litvinov G.L.* Error Autocorrection in Rational Approximation and Interval Estimates. [A survey of results] // Open Mathematics. – 2003. – № 1. – pp. 36–60. DOI: https://doi.org/10.2478/BF02475663.

23. *Viskovatov B.* De la méthode générale pour réduire toutes sortes des quantités en fractions continues // Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg. – 1809. – T. 1. – pp. 226–247.

References

1. *Andreev B.A., Klushin I.G.* Geologicheskoe istolkovanie gravitatsionnykh anomalii [Geological interpretation of gravity anomalies]. Leningrad: Gostoptekhizdat; 1962. 495 p.

2. *Berezkin V.M., Kirichek M.A., Kunarev A.A.* Primenenie geofizicheskikh metodov razvedki dlya pryamykh poiskov mestorozhdenii nefti i gaza [Application of geophysical methods of exploration for direct prospecting of oil and gas fields]. Moscow: Nedra; 1978. 223 p.

3. *Gaysin R.M., Nabatov V.V.* Detection of anomalous zones by the continuation method in underground electric exploration. *Mining information and analytical bulletin.* 2018;6:107–112. DOI: 10.25018/0236-1493-2018-6-0-107-112.

4. *Gvishiani A.D., Kaftan V.I., Krasnoperov R.I., Tatarinov V.N., Vavilin E.V.* Geoinformatics and systems analysis in geophysics and geodynamics. Izvestiya. Physics of the Solid Earth. 2019;55(1):33–49. DOI: 10.1134/S1069351319010038.

5. *Jones W.B., Tron W.J.* Continued Fractions: Analytic Theory and Applications. Reading: Addison-Wesley; 1980. 428 p.

6. *Ermokhin K.M.* Analytical continuation of gravitational and magnetic fields through masses. *Doklady Earth Sciences.* 2017;476(1):104–107. DOI: 10.1134/S1028334X17090021.

7. *Ermohin K.M.* Technology of cut construction by the geophysical fields analytical continuation method. *Geoinformatika.* 2010;2:51–60.

8. *Ermokhin K.M., Soldatov V.A.* On the determination of sources and internal structure of the Earth's magnetic field based on analytical continetion by continued frations. *Geoinformatika.* 2020;3:20–28. DOI: 10.47148/1609-364X-2020-3-20-28.

9. *Zhdanov M.S.* Geophysical inverse theory and regularization problems. Amsterdam: Elsevier, 2002. 609 p.

10. *Ladynin A.V.* Dipole sources of the main geomagnetic field. *Russian Geology and Geophysics.* 2014;55(4):495–507. DOI: 10.1016/j.rgg.2014.03.007.

11. *Logachev A.A., Zakharov V.P.* Magnitorazvedka [Magnetic prospecting]. Leningrad: Nedra; 1979. 351 p.

12. *Malovichko A.K., Kostitsyn V.I., Tarunina O.L.* Detal'naya gravirazvedka na neft' i gaz [Detailed gravity exploration for oil and gas]. Moscow: Nedra; 1989. – 224 p.

13. *Strakhov V.N.* Analiticheskoe prodolzhenie potentsial'nykh polei. Osobye tochki potentsial'nykh polei. Svyaz' osobykh tochek s geometriei vozmushchayushchikh mass [Analytical continuation of potential fields. Singular points of potential fields. Relationship of singular points with the geometry of perturbing masses]. In: Gravirazvedka: spravochnik geofizika. E.A. Mudretsova, K.E. Veselov, eds. Moscow: Nedra; 1990. pp. 324–340.

14. *Suetin P.K.* Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny [Classical orthogonal polynomials]. Moscow: Nauka; 1979. 415 p.

15. *Khovanskii A.N.* Prilozhenie tsepnykh drobei i ikh obobshchenii k voprosam priblizhennogo analiza [Application of continued fractions and their generalizations to questions of approximate analysis]. Moscow: Gostekhizdat, 1956. 203 p.

16. *Shalaev S.V.* Primenenie v geofizike analiticheskogo prodolzheniya potentsial'noi funktsii v nizhnyuyu poluploskost' [Application in geophysics of analytical continuation of a potential function into the lower half-plane]. *Journal of Leningrad Mining Institute.* 1959;36(2):15–26.

17. *Yanovskii B.M.* Zemnoi magnetizm [Terrestrial magnetism]. Ed. 4. Leningrad: Izd-vo Leningradskogo un-ta; 1978. 591 p.

18. *Yanovskii B.M.* Zemnoi magnetizm. T. 2. Teoreticheskie osnovy magnitometricheskogo metoda issledovaniya zemnoi kory i geomagnitnye izmereniya [Terrestrial magnetism. Vol. 2. Theoretical foundations of the magnetometric method for studying the earth's crust and geomagnetic measurements]. Ed. 3. Leningrad: Izd-vo Leningradskogo un-ta; 1963. 463 p.

19. *Binosi D.* Schlessinger Point Method: Theory and Applications. In: Continuum Functional Methods for QCD at New Generation Facilities (ECT, Italy. May 7-10, 2019). Trento: ECT; 2019. 50 p. Available at: https://indico.ectstar.eu/event/46/contributions/991/attachments/678/899/DB-spectral.pdf (accessed 10.12.2021).

20. *Fedi M, Florio G.* Downward continuation within the quasi-harmonic region. In: EGM International Workshop. Adding new value to Electromagnetic, Gravity and Magnetic Methods for Exploration (Capri, Italy, April 11–14, 2010). 2010. 5 p. – Available at: https://www.eageseg.org/data/egm2010/Sessione%20C/Oral%20papers/C_OP_14.pdf (accessed: 10.12.2021).

21. *Geosoft.* Oasis Montaj V 7.1. User manuals. 2013. 79 p.

22. *Litvinov G.L.* Error Autocorrection in Rational Approximation and Interval Estimates. [A survey of results]. *Open Mathematics.* 2003;1:36–60. DOI: https://doi.org/10.2478/BF02475663.

23. *Viskovatov B.* De la méthode générale pour réduire toutes sortes des quantités en fractions continues. Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg. 1809;1:226–247.

Статья поступила в редакцию 28.09.2021, одобрена после рецензирования 11.10.2021, принята к публикации 06.12.2021.
The article was submitted 28.09.2021; approved after reviewing 11.10.2021; accepted for publication 06.12.2021.

Информация об авторе

Ермохин Константин Михайлович

Доктор технических наук

Ведущий научный сотрудник Санкт-Петербургского филиала Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова Российской академии наук (СПбФ ИЗМИРАН),

199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 5, лит. Б

Information about the author

Konstantin M. Ermokhin

Doctor of Engineering Sciences

Leading Researcher of Saint-Petersburg branch of Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere and Radio Wave Propagation named after Nikolay Pushkov of the Russian Academy of Sciences (StPB of IZMIRAN),

5 liter Б, Universitetskaya naberezhnaya, Saint-Petersburg, 199034, Russia