

С.В. Мицын, Г.А. Ососков

ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ СЕТОЧНЫХ МОДЕЛЕЙ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ



Введение

Множество численных методов обработки геофизических полей основано на физических соотношениях, выраженных в виде интегральных уравнений, которые простираются на бесконечность во всех направлениях. Игнорирование такого рода краевых условий в численных реализациях, нацеленных на обработку сеточных моделей, приводит к тому, что результаты обработки данных имеют краевые эффекты – разнообразные искажения вблизи границ. Хотя на модельных примерах их может и не быть, реальные поля обычно представляют собой влияние многокомпонентной фрактальной среды, где поля отдельных компонент (тел) сложены вместе и, как правило, трудноотделимы друг от друга, и обработка данных – сеточных моделей реальных полей – приводит к краевым эффектам. Остро стоит вопрос о способах работы с такими полями и, в частности, борьбой с краевыми эффектами.

Обычный способ подавления краевых эффектов – экстраполяция полей за границы имеющихся данных, в предположении некоей «логичности» или соответствия методов экстраполяции физическим законам. Авторы предлагают новый способ такой экстраполяции, гарантирующие непрерывность поля и его градиента, что важно для дальнейшей обработки геофизическими численными методами.

Принципы построения метода

Принципиальная составляющая нашего метода экстраполяции состоит в условности обоснованности построенной модели с точки зрения законов физики. В связи с тем, что основное предназначение метода – не составление адекватной модели поля в области экстраполяции, а лишь подготовка данных для дальнейшей обработки, при его составлении авторы делают основной упор не на минимизацию отклонения модели от поля в экстраполированной области, а на сохранение некоторых основных характеристик поля как математического объекта. Прежде всего, это непрерывность поля, то есть отсутствие разрывов в области экстраполяции и на границе имеющихся данных. Менее очевидное требование – непрерывность первых производных. Дело в том, что

некоторые методы фильтрации, как например, один из фильтров в [1], эквивалентен оконному фильтру, выделяющему вторую производную. В этом примере разрыв в первой производной вызовет скачок в построенной сеточной плотностной модели, что, по сути, является краевым эффектом.

Одним из интересных методов экстраполяции, опробованных авторами, является численное решение краевой задачи Дирихле методом конечных разностей. Хотя результирующая функция и непрерывна, она имеет разрыв первой производной на границах области имеющихся данных. В то же время краевая задача Неймана не имеет разрыва первых производных, но может появиться разрыв самой функции на этой границе. В статье предлагается метод экстраполяции, основанный на численном решении краевой задачи, а результат его работы является как минимум дважды непрерывным и на краях.

Описание метода

Обозначим $\Omega = \{x_j = x_0 + j\Delta x\} \times \{y_i = y_0 + i\Delta y\}$, $i \in \{0, 1, \dots, n_y - 1\}, j \in \{0, 1, \dots, n_x - 1\}$ – узлы сетки, на которой в точках $p \in B \subset \Omega$ определена дискретная функция $\hat{f}(p)$, представляющая незашумленные или отфильтрованные измерения поля на сетке, а в точках $\bar{B} = \Omega - B$ функция $\hat{f}(p)$ не определена.

Наша постановка задачи экстраполяции заключается в постановке функции $\hat{f}(p)$ в соответствие непрерывной функции $f(\tilde{p})$, $\tilde{p} \in \mathbf{R}^2 : \forall p \in B : \hat{f}(p) = f(\tilde{p})$. Тогда экстраполированная модель – функция $f(p)$, $p \in \Omega$, такая, что $\forall p \in B : f(p) = \hat{f}(p)$ и $\forall p \in \bar{B} : f(p) \cong \tilde{f}(p)$. Мы заранее отходим от того, что функция $\tilde{f}(p)$ непременно должна моделировать реальное поле с минимальным отклонением; вместо этого $\tilde{f}(p)$ должна быть просто дважды непрерывна.

Метод основан на постановке функции $\tilde{f}(p)$ следующего ограничения:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^4 \tilde{f}(p)}{dx^4} + \frac{d^4 \tilde{f}(p)}{dy^4} = 0. \end{aligned} \right. \quad (1)$$

Причем искомая функция $f(p)$ ищется численно методом конечных разностей, исходя из этого закона. Отличие от двумерной краевой задачи Дирихле

состоит в требовании равенства нулю сумм 4-х производных, а не вторых.

Для решения (1) авторы используют метод конечных разностей. Если $\Delta p \in \{(h, 0), (0, h)\}$ для некоторого $h \in \mathbf{R}$, то разложение $f(p)$ в ряд Тейлора (беря производные вдоль соответствующей оси) имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(p - 2\Delta p) &= \tilde{f}(p) - 2h\tilde{f}^{(1)}(p) + 4\frac{h^2}{2!}\tilde{f}^{(2)}(p) - \\ &- 8\frac{h^3}{3!}\tilde{f}^{(3)}(p) + 16\frac{h^4}{4!}\tilde{f}^{(4)}(p) + O(h^5), \\ \tilde{f}(p - \Delta p) &= \tilde{f}(p) - h\tilde{f}^{(1)}(p) + \frac{h^2}{2!}\tilde{f}^{(2)}(p) - \frac{h^3}{3!}\tilde{f}^{(3)}(p) + \\ &+ \frac{h^4}{4!}\tilde{f}^{(4)}(p) + O(h^5), \\ \tilde{f}(p + \Delta p) &= \tilde{f}(p) + h\tilde{f}^{(1)}(p) + \frac{h^2}{2!}\tilde{f}^{(2)}(p) + \frac{h^3}{3!}\tilde{f}^{(3)}(p) + \\ &+ \frac{h^4}{4!}\tilde{f}^{(4)}(p) + O(h^5), \\ \tilde{f}(p + 2h) &= \tilde{f}(p) + 2h\tilde{f}^{(1)}(p) + 4\frac{h^2}{2!}\tilde{f}^{(2)}(p) + 8\frac{h^3}{3!}\tilde{f}^{(3)}(p) + \\ &+ 16\frac{h^4}{4!}\tilde{f}^{(4)}(p) + O(h^5). \end{aligned}$$

Рассмотрим их взвешенную сумму:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(p - 2\Delta p) - 4\tilde{f}(p - \Delta p) + 6\tilde{f}(p) - 4\tilde{f}(p + \Delta p) + \tilde{f}(p + 2\Delta p) &= \\ = \tilde{f}(p)(1 - 4 + 6 - 4 + 1) + h\tilde{f}^{(1)}(p)(-2 + 4 - 4 + 2) + \\ + \frac{h^2}{2!}\tilde{f}^{(2)}(p)(4 - 4 - 4 + 4) + \frac{h^3}{3!}\tilde{f}^{(3)}(p)(-4 + 4 - 4 + 8) + \\ + \frac{h^4}{4!}\tilde{f}^{(4)}(p)(16 - 4 - 4 + 16) + O(h^5) &= h^4\tilde{f}^{(4)}(p) + O(h^5). \end{aligned}$$

Таким образом, метод конечных разностей для 4-х производных реализуется путем использования

следующего оконного шаблона (для справочной информации по определению СЛАУ через оконный шаблон см., например, [2]):

$$\begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & & -4 \\ 1 & -4 & 12 & -4 & 1 \\ & & & -4 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Важный класс методов обработки данных – методы, основанные на преобразованиях Фурье. Такие численные методы используют дискретные преобразования Фурье (ДПФ), которые имеют свойство периодичности – при их интерпретации считается, что непрерывная функция, чья выборка подвергается ДПФ, периодична. Если это не так, то дальнейшие манипуляции с Фурье образами приводят к краевым эффектам Гиббса – искажениям в точках Ω , близким к краям сетки. Однако с помощью экстраполяции указанным методом можно подготовить непериодичные данные так, чтобы они стали периодичными. Для этого можно связать края сетки, авторы предлагают соединять края по типу тора (рис. 1).

Авторы предлагают следующую схему построения тора: пусть дана функция $\tilde{f}(p)$, определенная во всех узлах сетки размера $n_x \times n_y$, и ее требуется экстраполировать на расстояния l_x и l_y в каждую сторону соответствующей оси. Тогда следует определить $k_x = cl_x$ и $k_y = cl_y$ и взять новую сетку Ω_e размера $(n_x + 2k_x) \times (n_y + 2k_y)$, на которой определить функцию

$$\hat{f}_e(p) = \hat{f}_e(x; y) = \hat{f}(x - k_x; y - k_y).$$

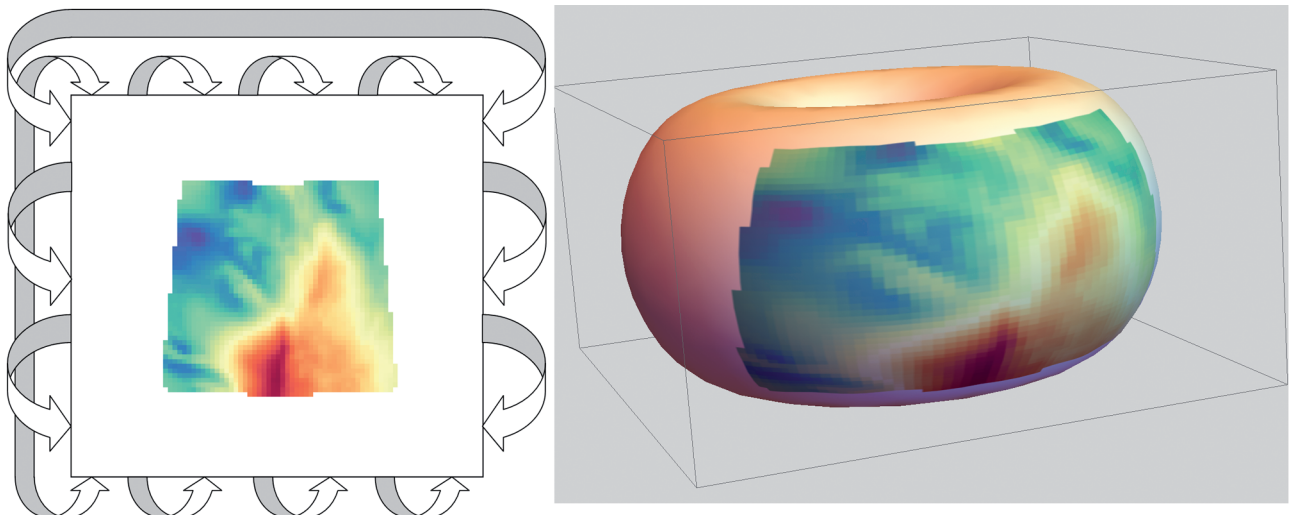


Рис. 1. Сетка, соединённая краями в тор

Узлы получившейся сетки с экстремальными координатами связаны с противоположным узлами – например, $p_{j,0} = (x_0 + j\Delta x; 0)$ и $p_{j,n_y+2k_y} = (x_0 + j\Delta x; x_0 + (n_y + 2k_y)\Delta y)$. В этом случае краевые условия учитываются прямым образом: собственно краев сетка не имеет, а края задачи заданы через множество точек B , в которых значения $f(p)$ известны, и которые тривиально учитываются в линейных уравнениях – соответствующие члены переносятся на правую сторону уравнений.

Можно взять $1 < c < 2$. При меньшей c особенность периодичности будет резче отражаться в интересующей области экстраполяции (на расстоянии l_x и l_y от границы данных), но увеличение c будет асимптотически квадратично увеличивать размер сетки Ω_e и замедлять вычисления. Также следует учесть, что для поля с сильно выраженным трендом следует брать $k_x \geq \frac{n_x}{2}$.

Мотивация построения метода

Равенства нулю второй производной недостаточно для сохранения ее непрерывности. Во-первых, это выходит из законов физики: хотя гравитационное поле и потенциально, оно трехмерно, и оператор Лапласа дифференцирует по трем координатам. Однако исходные данные имеются только на плоскости. Значит, применение двухкоординатного оператора Лапласа к функции \tilde{f} не дает функцию, тождественно равную нулю.

Хотя в геофизике имеются методы пересчета поля вверх, они также выражаются через фильтрацию и, значит, также подвержены влиянию краевых эффектов и поэтому в данном случае неприменимы для построения потенциального поля. При этом пересчет поля вниз вообще плохо определен [3].

Один класс краевых условий – краевые условия Коши – сохраняет непрерывность и функции, и ее градиента, но на замкнутом контуре он неприменим к уравнению Лапласа, так как получившаяся задача является переопределенной.

Численная реализация

Для численной реализации авторы используют C++ библиотеку Eigen [4], реализующую, среди прочих, следующие методы численного решения СЛАУ для разреженных матриц: метод Холецкого и итеративный метод сопряженных градиентов. Методы применимы, так как симметричность решаемой матрицы тривиально выходит из вида оконного шаблона. С другой стороны, у метода большие требования к вычислительным мощностям: метод Холецкого требователен к памяти, а метод сопряженных градиентов медленно сходится (например, по сравнению с его применением для решения краевой

задачей Дирихле). Авторы предлагают использовать метод Холецкого для небольших объемов данных и прибегать к итеративному методу сопряженных градиентов, если имеется нехватка памяти. Для ускорения процесса решения при использовании итеративного метода авторы берут линейную интерполяцию в качестве начального приближения.

Сравнение с другими методами экстраполяции

Примерами других широко используемых методов экстраполяции служат включенные в ГИС ИНТЕГРО [5] метод линейной циклической экстраполяции и нециклический метод заполнения оконным усреднением.

Для качественного сравнения методов была взята модель поля части номенклатурного листа R-52, основанная на данных гравиметрии, и представленная на рис. 1, – заполненная сеть размером 400 на 400 точек. С целью сравнения перед экстраполяцией у сетки были отрезаны данные «снизу» на расстояние 200 точек, после чего данные были экстраполированы на $k_x = k_y = 200$ точек по каждому направлению, в итоге получилась сеть Ω_e размера $(n_x + 2k_x) \times (n_y + 2k_y) = 800 \times 600$ точек.

На рис. 2 представлена часть сетки, содержащей область экстраполяции и изначальную сетку для сравнения. Рисунок демонстрирует лишь часть сетки «снизу» – там, где были отрезаны данные. Качественный анализ указывает на то, что два упомянутых метода продуцируют модель с разрывом первой производной, при этом усреднение также производит некоторые дефекты экстраполяции (рис. 3). По сравнению с этими методами, модель, построенная новым методом, не имеет разрывов первых производных и в некотором смысле гладкая. Это – прямое следствие схожести метода с решением краевой задачей Дирихле, результат решения которой также представляет собой гладкую функцию, усредненную вдалеке от границ.

На рис. 4 представлено суммарное отклонение экстраполированной модели от изначальной модели в зависимости от расстояния от линии отреза по оси oY . То есть, суммы отклонений g_i взяты вдоль оси oX (вдоль профилей): $g_i = \sum_j |f(x_j, y_i) - \hat{f}(x_j, y_i)|$.

Видно, что (для конкретно этих данных) среди рассмотренных методов самую маленькую разницу между экстраполированной и исходной моделью имеет представленный метод. Конечно, для всех методов очевидно наличие роста ошибки экстраполяции с увеличением расстояния от границы, но представленный метод показывает наименьший рост ошибки для нескольких начальных профилей, что можно объяснить непрерывностью первых производных.

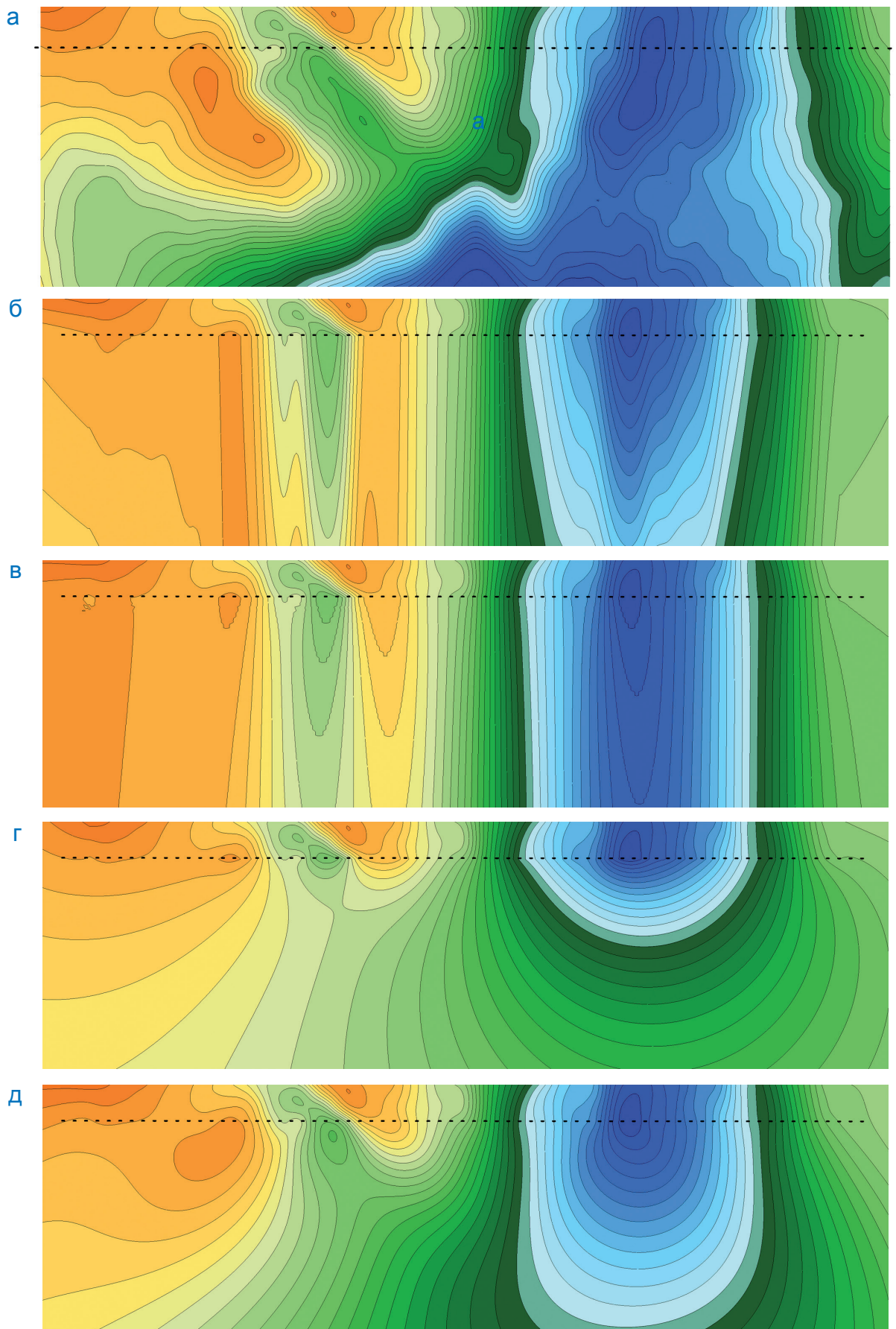


Рис. 2. Результаты экстраполяции: а – исходные данные; б – экстраполяция циклической линейной интерполяцией; в – экстраполяция усреднением; г – экстраполяция решением краевой задачи Дирихле; д – экстраполяция представленным методом; штриховая линия – линия отреза

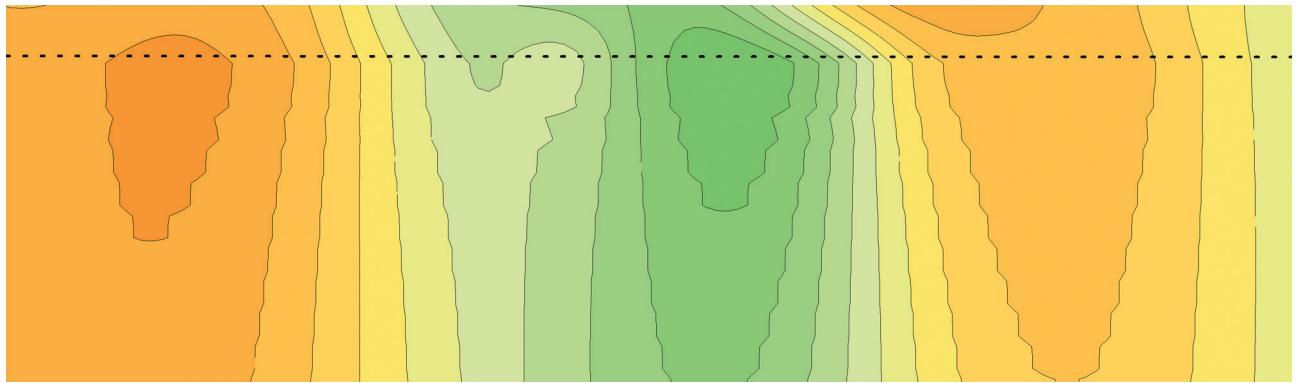
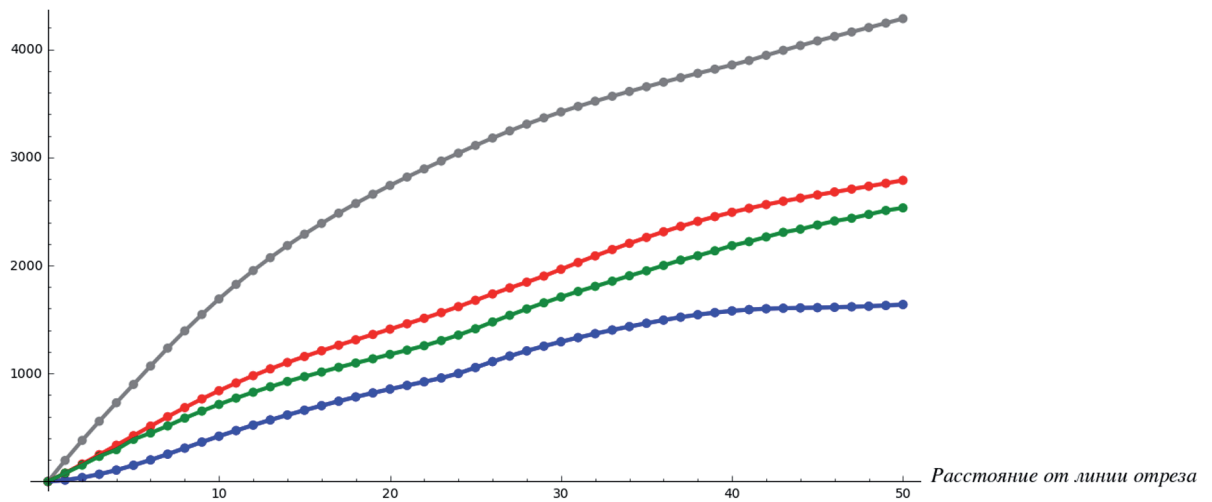


Рис. 3. Дефекты экстраполяции усреднением

Сумма модулей разностей



Конечные разности
для сумм модулей разностей

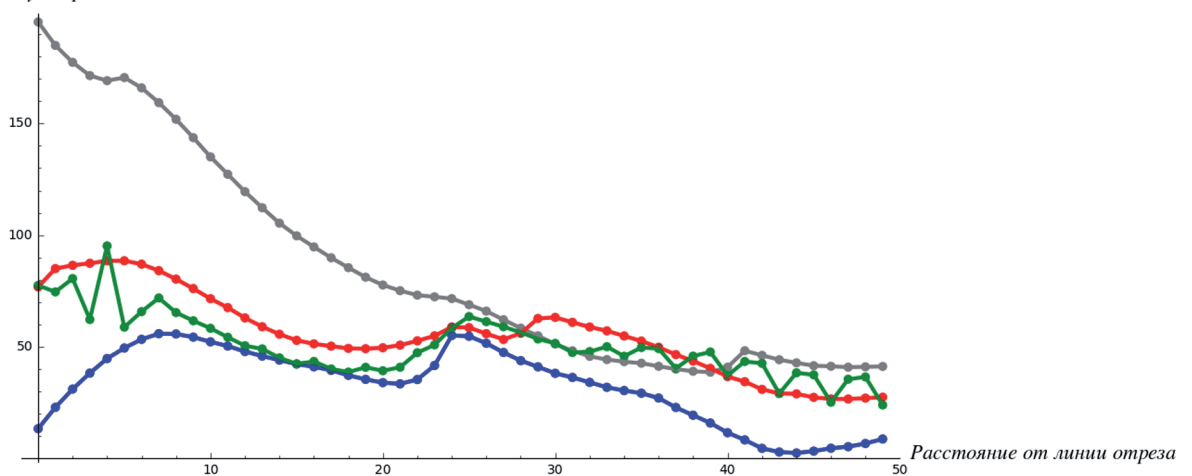


Рис. 4. Суммарное отклонение результата экстраполяции от исходных данных: синий цвет – представленный метод, серый – экстраполяция решением краевая задача Дирихле, красный – циклическая линейная интерполяция, зелёный – экстраполяция усреднением

Также можно выделить важное качество представленного метода экстраполяции – усреднение поля при удалении от границ исходных данных. Этому свойству можно поставить в соответствие простую «логику»: при удалении от границ мы не можем достоверно предсказать локальные особенности поля, однако можем судить о некоторых общих, региональных чертах.

Другая особенность метода – игнорирование тренда – истекает из того, что экстраполяция является циклической. Действительно, хотя тренд является качественным описанием устойчивой первой производной на большой области, а метод сохраняет первую производную непрерывной, цикличность экстраполяции приводит к постепенному «слому» тренда и обращению первой производной с целью удовлетворения требования близости значений $f_e(p)$ к значениям $\hat{f}_e(p)$ на противоположной границе области определения $\hat{f}_e(p)$.

Заключение

Авторами представлен метод экстраполяции сеточных моделей геофизических полей, имеющий важные свойства: цикличность и непрерывность поля и градиента. В виде этих свойств он имеет важные преимущества над традиционными методами, также изложенными в статье. Авторы предлагают использовать этот метод во всех возможных случаях подготовки сеточных данных экстраполяцией для их последующей 2д/3д обработки геофизическими численными методами.

Ключевые слова: экстраполяция, геофизические поля, сеточные модели, уравнение в частных производных, задача Дирихле

ЛИТЕРАТУРА

1. Приезжев И.И. Построение трехмерного распределения физических параметров среды по данным гравиразведки (магниторазведки) и сейсморазведки // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей : мат-лы 35-й сессии Междунар. семинара им. Д.Г. Успенского. – Ухта, 2008.
2. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М. : Наука, 1971. – 553 с.
3. Кобрунов А.И. Математические основы теории интерпретации геофизических данных : учеб. пособие. – Ухта : УГТУ, 2007. – 286 с.
4. Eigen [Электронный ресурс]. – URL: <http://eigen.tuxfamily.org> (дата обращения: 16.04.2016).
5. ГИС ИНТЕГРО [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.geosys.ru/index.php/ru/gisintegro.html> (дата обращения: 12.04.2016).