

УДК 551.311.21:681.3

© И.К. Лурье, М.А. Сакиркина

И.К. Лурье, М.А. Сакиркина

# ПРОГНОЗНОЕ КАРТОГРАФИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ РЕЛЬЕФА МЕСТНОСТИ, ВЫЗВАННОГО ПРОЦЕССАМИ СКЛОНОВОЙ ЭРОЗИИ



## Введение

Плоскостной смыв почвы является одним из основных механизмов склоновой эрозии. Осадки, выпадающие в виде дождя и снега, ведут к постепенному размыву почвенного покрова. Материалы грунта, составляющие этот покров, переходят во взвесь, и вместе с несущей ее жидкостью перемещаются вниз по склону в полном соответствии с законами гравитации. В результате, в одних местах профиля происходит смыв почвы, в других ее простой перенос, в третьих – выпадение твердых материалов из раствора и образование наносов. Постоянное действие указанных процессов приводит к постепенному изменению рельефа местности.

Моделирование эрозионных процессов и прогнозирование на этой основе изменений рельефа местности представляет собой значимую задачу. В работе [1] был предложен конструктивный метод такого моделирования при решении модельной задачи. В качестве исходного базиса для построения модели склоновой эрозии использовалось универсальное уравнение Уишмейера-Смита (USLE), сформулированное первоначально для расчета эрозионного смыва почвы с сельскохозяйственных угодий [2-4]. В сущности, это уравнение означает, что поток размывтой водой почвы идет в направлении линии тока, а объемный расход почвы, рассчитанный на единицу длины дуги линий уровня, через которые происходит перенос вещества, пропорционален синусу угла наклона поверхности склона к горизонту в каждой его точке (фактор рельефа). При этом коэффициент пропорциональности, входящий в уравнение, зависит от свойств почвенного покрова и климатических условий данной местности. По своей сути USLE представляет феноменологический закон, выражающий связь потока вещества и обуславливающей его силы. Использование этого закона вместе с уравнением материального баланса вещества, переносимого по поверхности склона, позволяет выявлять места смыва и места накопления почвы и, следовательно, проследить и дать долгосрочный прогноз изменения рельефа.

В совокупности с геоинформационными технологиями пространственного анализа такой подход к проблеме позволяет осуществлять долгосрочное прогнозное картографирование изменений рельефа местности, вызванных процессами склоновой эрозии.

## Исходное уравнение модели склоновой эрозии

Основное уравнение, используемое для моделирования склоновой эрозии, имеет вид [1]:

$$q = -k \cdot \sin \alpha, \quad (1)$$

где  $q$  – объемный расход почвы, рассчитанный на единицу длины линии уровня,  $\text{м}^3/(\text{м} \cdot \text{год})$ ;  $\alpha$  – угол наклона поверхности склона к горизонту;  $k$  – феноменологический коэффициент, зависящий от свойств почвенного покрова и климатических условий,  $\text{м}^2/\text{год}$ .

Если уравнение поверхности почвенного покрова местности представить в виде функции  $z = f(x, y, t)$ , где  $x, y$  – пространственные координаты в горизонтальной плоскости проекции рассматриваемой местности (ось  $z$  направлена вертикально вверх);  $t$  – время, то уравнение (1) закона склоновой эрозии в проекциях на координатные оси имеет вид:

$$\begin{cases} q_x = -k \cdot \frac{f'_x}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}} \\ q_y = -k \cdot \frac{f'_y}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}} \end{cases}, \quad (2)$$

где  $f'_x = \partial f / \partial x$ ,  $f'_y = \partial f / \partial y$  частные производные от функции  $z = f(x, y, t)$  по координатам; в общем виде  $k = k(x, y)$  [1].

Основное уравнение баланса объемов переносимой почвы имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0,$$

а после подстановки в него выражения (2) для компонент расхода:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \cdot \frac{f'_x}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \cdot \frac{f'_y}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}} \right). \quad (3)$$

В случае, когда углы наклона поверхности склона к плоскости горизонта малы (т.е.  $(f'_x)^2 \ll 1$ ,  $(f'_y)^2 \ll 1$ ), последнее уравнение упрощается:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right). \quad (4)$$

Если же вдобавок к этому принять, что  $k(x, y) = const$ , т.е. почвенный покров на всем склоне считать однородным, то уравнение (4) еще больше упрощается и принимает вид уравнения «типа теплопроводности»:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = k \cdot \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right). \quad (5)$$

Для решения уравнения (5) необходимы *начальные и краевые* условия. В качестве начального условия может быть принята форма рельефа местности в некоторый момент времени  $t = 0$ , например в момент геодезической съемки:  $f(x, y, 0) = \varphi(x, y)$ . Краевые условия отражают обмен продуктами эрозии изучаемого полигона с внешней местностью. Эти условия удобно формулировать на границах двух типов: линиях водораздела и линиях, на которых уровень рельефа местности не изменяется, например на берегах рек и водоемов. В точках линий первого типа следует принимать условие  $df/dn = 0$  непроницаемости (производная по нормали равна 0), означающее, что поток продуктов эрозии через такие линии отсутствует; в точках линий второго типа следует принимать условие  $f(x_L, y_L) = const$ , означающее, что высотные отметки местности на этих линиях не изменяются.

Уравнения (3), (4) или (5), дополненные начальными и краевыми условиями, позволяют рассчитывать функцию  $z = f(x, y, t)$ , т.е. прогнозировать изменения рельефа местности в зависимости от времени.

### Конечно-разностная аппроксимация

Если к рассматриваемой проблеме подойти с позиции геоинформатики, т.е. с позиции прогноза эрозионных процессов путем обработки данных, представляемых цифровой моделью рельефа местности, то необходимо от описания рельефа непрерывной функцией перейти к его конечно-разностной аппроксимации. Иными словами, для модели поверхности введем сеточную функцию  $z_{i,j} = f(x_i, y_j)$ , в которой использована сетка квадратов:

$$x = x_0 + \Delta \cdot i, \quad y = y_0 + \Delta \cdot j, \quad i, j \in \{1, 2, 3, \dots\},$$

$\Delta$  – шаг сетки, определяющий пространственное разрешение модели. Тогда, используя явную схему решения уравнения (4), его можно представить в виде конечно-разностного аналога:

$$\delta f_{i,j} = \frac{\langle k_{i,j} \rangle}{\Delta^2} \cdot \left[ \frac{\langle k_{i,j} f_{i,j} \rangle}{\langle k_{i,j} \rangle} - f_{i,j} \right] \cdot \delta t, \quad (6)$$

где:

$$\langle k_{i,j} \rangle = k_{i-1,j} + 2k_{i,j} + k_{i,j-1};$$

$$\langle k_{i,j} f_{i,j} \rangle = k_{i-1,j} f_{i-1,j} + k_{i,j} (f_{i+1,j} + f_{i,j+1}) + k_{i,j-1} f_{i,j-1},$$

а  $\delta t$  – шаг расчета по времени.

Уравнение (6) существенно упрощается в случае однородного почвенного покрова, т.е. в случае выполнения (точного или приближенного) условия  $k(x, y) = k = const$ . Для этого случая из (6) имеем:

$$\delta f_{i,j} = \left[ \frac{f_{i-1,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1}}{4} - f_{i,j} \right] \cdot \frac{k \delta t}{\Delta^2}. \quad (7)$$

Смысл уравнения (7) достаточно прозрачен, он означает:

а) если среднее арифметическое четырех значений  $f_{i-1,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1}$  высоты рельефа местности в точках, равноотстоящих от центральной точки  $x_{i,j}$ , больше высоты  $f_{i,j}$  рельефа местности в этой центральной точке, то  $\delta f_{i,j} > 0$ , т.е. точка  $x_{i,j}$  принадлежит области накопления почвы;

б) если среднее арифметическое этих высот меньше высоты  $f_{i,j}$ , то точка  $x_{i,j}$  принадлежит области смыва почвы, рис. 1.

Структура уравнения (5) показывает, что в рассматриваемой проблеме можно ввести параметр  $\tau = k \cdot t$ , в который значение  $k$  – феноменологического коэффициента – входит только в произведении со временем. Это означает, что результаты расчета, относящиеся к различным почвам (т.е. различным значениям коэффициента  $k$ ), автоматически совпадают с результатами расчета с заранее фиксированным коэффициентом  $k_0$ , однако в другие (более поздние или более ранние) моменты времени. Иными словами, форма рельефа местности, характеризуемая коэффициентом  $k$ , в момент времени  $t$  будет той же самой, что и форма рельефа местности, рассчитанная с коэффициентом  $k_0$ , однако не в момент времени  $t$ , а в момент  $k/k_0 \cdot t$ . Если  $k > k_0$ , то рельеф местности, рассчитанный в момент времени  $t$  с коэффициентом  $k_0$ , относится к более раннему моменту, чем рассчитанный; если  $k < k_0$ , то к более позднему. Таким образом, открывается возможность выполнения прогнозных расчетов с последующей привязкой полученных результатов к реальному времени с помощью измеренных коэффициентов  $k$ .

Последнее утверждение вытекает также из формулы (7), в которую коэффициент  $k$  входит в виде безразмерной комбинации  $k \delta t / \Delta^2$  ( $k \delta t / \Delta^2 < 1$ ). Полагая эту комбинацию равной, например, 0,1 или 0,01, или 0,001 и т.д., можно рассчитать изменения высоты рельефа местности за один интервал времени:  $0,1 \Delta^2/k$  или  $0,01 \Delta^2/k$ , или  $0,001 \Delta^2/k$  и т.д., и шаг за шагом, в последующие моменты.

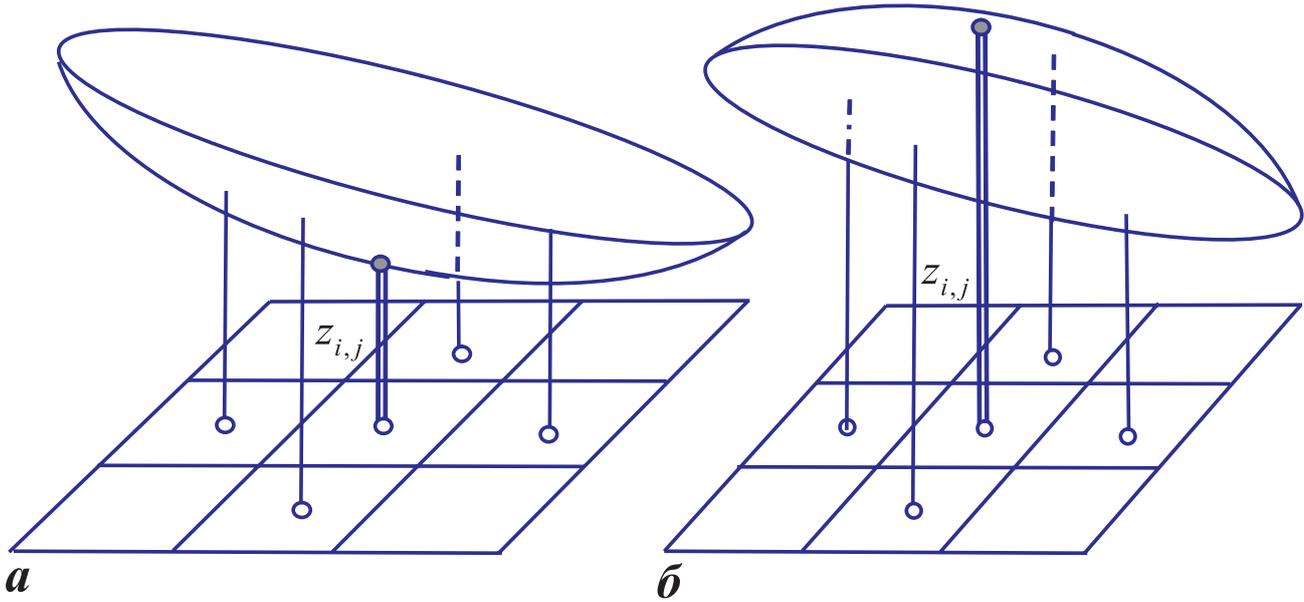


Рис. 1. Примеры некоторых случаев взаимного соотношения высот  $z_{i,j} = f_{i,j}$  рельефа в растровых ячейках  $x_{i,j}$ : а – ячейка накопления; б – ячейка смыва

### Алгоритм расчета

Для исследования выбирается местность, представленная цифровой моделью рельефа (ЦМР)  $z_{i,j} = f_{i,j}^{(0)}$ . На местности выделяется замкнутая область, подлежащая расчету. Удобно использовать область, ограниченную априорно очевидными линиями тока, а также линиями неизменного уровня, например: реками, озерами и т.п. объектами. В точках  $M$  линий тока следует использовать краевое условие, состоящее в том, что  $q_n$  (расход почвы по нормали к этой линии) равен 0, т.е.  $(\partial f / \partial n)_{M^p}$  или  $z_M = z_B$ , где  $B$  – ближайшая к границе точка внутри области расчета, лежащая на нормали к этой границе. В точках  $M$  неизменных линий уровня следует использовать краевое условие  $z_M = const$ .

На первом шаге ( $s = 1$ ) расчета для каждой ячейки сетки (кроме граничных) осуществляется вычисление значений  $\delta f_{i,j}^{(1)}$  по формуле (7) для безразмерного интервала времени  $k\delta t / \Delta^2 = 10^{-n}$ , где  $n$  – выбранное натуральное число (в растровом ГИС-пакете можно воспользоваться средствами фокальных преобразований). Затем вычисляется сумма  $f_{i,j}^{(1)} = f_{i,j}^{(0)} + \delta f_{i,j}^{(1)}$ , определяющая рельеф местности в конце первого временного интервала.

На втором шаге ( $s = 2$ ) в правую часть формулы (7) подставляются значения функции  $f_{i,j}^{(1)}$ , рассчитанные на первом шаге, и по ним вычисляются значения  $\delta f_{i,j}^{(2)}$ . Затем вычисляется сумма

$$f_{i,j}^{(2)} = f_{i,j}^{(1)} + \delta f_{i,j}^{(2)} = f_{i,j}^{(0)} + \sum_{s=1}^{s=2} \delta f_{i,j}^{(s)}$$

определяющая рельеф местности в конце второго временного интервала, т.е. в момент  $2 \cdot k\delta t / \Delta^2$  и т.д.,  $s = 1, 2, 3, \dots, m$ .

В конце  $m$ -го шага ( $s = m$ ) будет найдено значение  $z_{i,j} = f_{i,j}^{(m)}$  местности в момент  $m \cdot k\delta t / \Delta^2$ . В тех растровых ячейках  $x_{i,j}$ , где  $\sum_{s=1}^{s=m} \delta f_{i,j}^{(s)} < 0$  происходит эрозионный смыв почвы; в тех ячейках, где  $\sum_{s=1}^{s=m} \delta f_{i,j}^{(s)} > 0$ , происходит ее накопление.

Трактовка полученного результата, например, при числе  $m$  итераций, т.е. после  $m$  шагов, состоит в следующем.

Рассчитаны значения  $f_{i,j}^{(m)}$ , дающие рельеф местности в момент безразмерного времени  $\tau = 1$  или в момент времени  $t = \Delta^2 / k$ . Это означает, если  $\Delta^2 = 25 \text{ м}^2$ , то при  $k = 1 \text{ м}^2/\text{год}$  полученный результат относится ко времени  $t = \Delta^2 / k = 25 / 1 = 25$  лет; при  $k = 0,1 \text{ м}^2/\text{год}$  полученный результат относится ко времени  $t = \Delta^2 / k = 25 / 0,1 = 250$  лет; при  $k = 0,01 \text{ м}^2/\text{год}$  полученный результат относится ко времени  $t = \Delta^2 / k = 2500$  лет и т.д. Иными словами, один и тот же рассчитанный результат величины сноса/наноса почвы может относиться к различным моментам времени в зависимости от значения коэффициента  $k$ .

### Пример прогнозного картографирования

Проиллюстрируем работу предлагаемого алгоритма на примере ложбины, расположенной на территории учебно-научного полигона МГУ «Сатино» (Калужская область). На рис. 2 изображен участок этого полигона, имеющей ложбину, спускающуюся

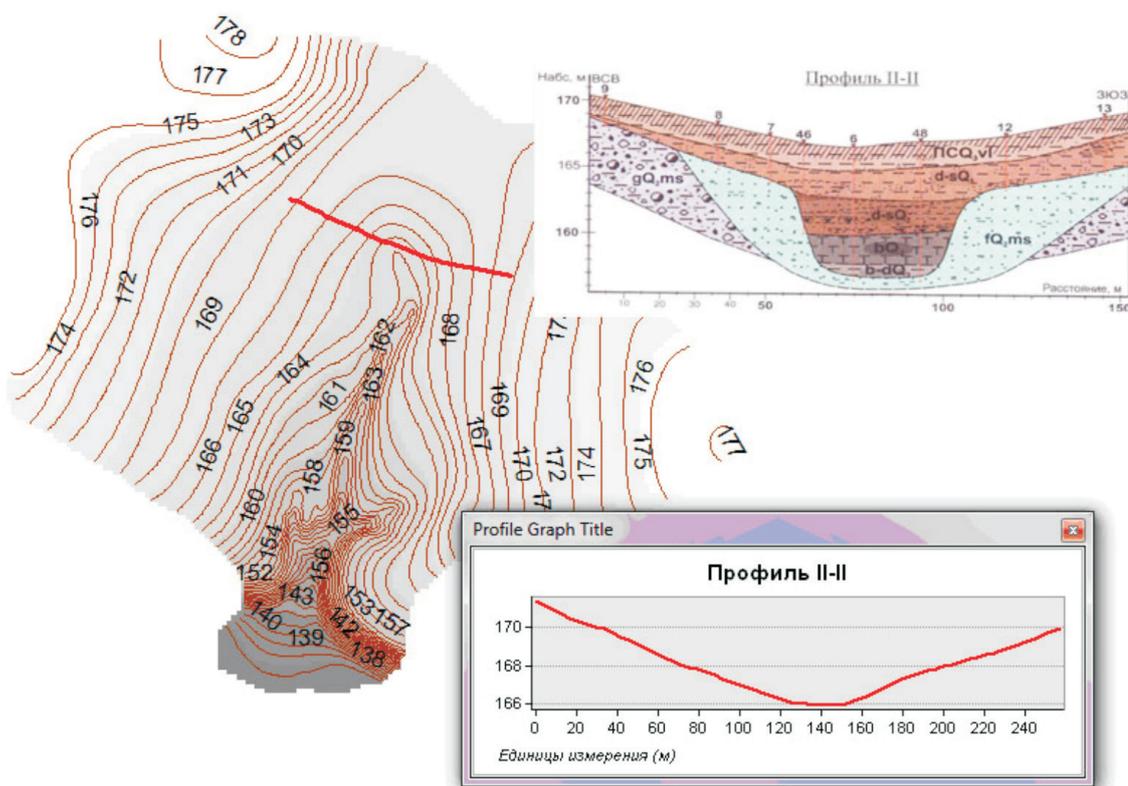


Рис. 2. Участок полигона «Сатино» с ложбиной «Сенокосная» (профиль ложбины «Сенокосная» заимствован из работы Еременко Е.А, Панина А.В. [5])

к реке Протва. Перепад высот рельефа составляет примерно 40 м, причем плавное понижение сменяется крутыми склонами балки, выходящей к реке ( $\approx 138$  м).

На рис. 3 представлены результаты расчета изменений формы рельефа местности, выполненные по излагаемому алгоритму, после  $m = 100$  итерационных шагов. Из этого рисунка видно, что практически вся площадь плавно опускающейся части рассматриваемого участка подвержена эрозии (светло зелено-коричневые тона), причем наиболее интенсивная эрозия наблюдается на склонах балки (темно-красный и коричневый цвет). Снесенная почва накапливается в области днища балки (темно-зеленый цвет). В силу особенности поймы р. Протва объем выноса продуктов в реку за рассматриваемый интервал времени оказался незначительным.

Из этого рисунка видно также, что области накопления и смыва продуктов эрозии на пологих участках профиля представлены чередующимися полосами светло-зеленого, зеленого и коричневого цветов с незначительно отличающимися толщинами изменения профиля. Полученный результат, вероятно, связан с погрешностями цифровой модели рельефа, в которой на изогипсах крутизна склона испытывала скачкообразные изменения.

Заметим, что в качественном отношении полученные результаты не противоречат здравому смыслу. Если же говорить об их количественной стороне, то для того чтобы сделать заключение о том, каково истинное значение толщины слоя накопившихся или снесенных продуктов эрозии в той или иной точке участка полигона, необходимо знать коэффициент  $k$  эрозии, который определяется экспериментальным путем. Ибо смыв почвы в 0,93 м или отложения продуктов эрозии на днище балки величиной в 0,96 м могут относиться в равной степени как к 25 годам, если  $k = 1 \text{ м}^2/\text{год}$ , или к 250 годам, если  $k = 0,1 \text{ м}^2/\text{год}$ .

### Выводы

Феноменологический закон Уишмейера-Смита, определяющий зависимость расхода продуктов почвенной эрозии от угла наклона поверхности к горизонту, является замыкающим соотношением в уравнении материального баланса продуктов эрозии почвенного покрова. Получающееся уравнение служит основой для расчета динамики пространственного перемещения этих продуктов вдоль поверхности и, следовательно, для расчета изменений формы поверхности во времени.

Метод и алгоритм расчета, изложенные в работе, позволяют выявлять на поверхности места

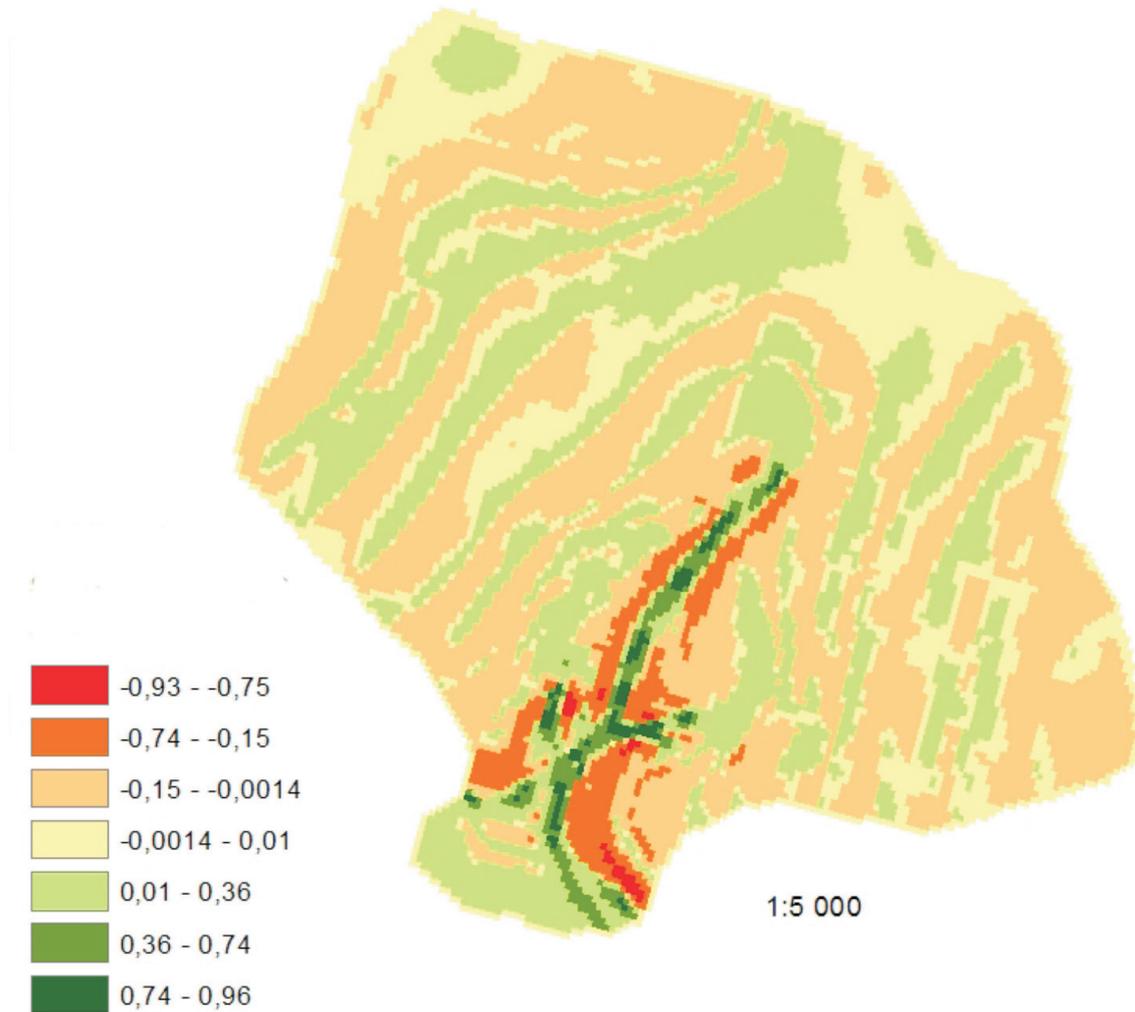


Рис. 3. Результаты расчета эрозии участка полигона Сатино (глубины смыва и отложений даны в м)

смыва почвы и области ее накопления. Достаточно простой и легко реализуемый численный метод позволяет по ЦМР и специфическим данным о коэффициенте эрозии почв рассматриваемой местности картографировать области смыва почвы и области ее накопления в результате перемещения продуктов эрозии. На примере участка учебно-научного полигона «Сатино» (Калужская область) продемонстрированы результаты прогнозного картографирования изменений рельефа местности, вызываемых процессами склоновой эрозии.

Работа выполнена при поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 13-05-41233-РГО-а.

**Ключевые слова:** моделирование, склоновая эрозия, уравнение материального баланса, ЦМР, смыв почвы, накопление почвы, прогнозное картографирование.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье И.К., Лурье М.В. Моделирование изменений форм рельефа местности за счет эрозии почвенного покрова // Геоинформатика. – 2010. – №4. – С. 28-32.
2. Wishmeir W.H., Smith D.D. Predicting rainfall erosion losses cropland east of the Rocky Mountains // Agric. Handbook. – № 282. – USDA, Washington DC, 1965. – 48 p.
3. Wishmeir W.H., Smith D.D. Predicting rainfall erosion losses – a guide to conservation planning // Agric. Handbook. – № 537. – USDA, Washington DC, 1978. – 54 p.
4. Renard K.G., Foster G.R., Weesies G.A., McCool D.K., Yoder D.C. Predicting soil erosion by water: a guide to conservation planning with the revised universal soil loss equation (RUSLE) // Agric. Handbook. – № 703. – USDA, Washington DC, 1997. – 265 p.
5. Еременко Е.А, Панин А.В. Ложбинный мезорельеф Восточно-Европейской равнины: монография – М. : МИРОС, 2010. – 192 с.