

УДК 550.8.053:681.3

© С.В. Мицын

**С.В. Мицын**

# НОВЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ ЗАДАЧ НА ГЕОПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОЛЯ НА ПРОФИЛЯХ



## Введение

Несмотря на широкое внедрение трехмерного моделирования и развитие вычислительной техники, позволяющее решать трехмерные задачи на геопотенциальные поля вот уже два десятка лет, до сих пор остается актуальным класс задач, связанный с двумерным моделированием и решением прямых и обратных задач на профилях [1, 2]. Это объясняется в первую очередь плохой изученностью моделируемых территорий и скудностью имеющихся в наличии данных. Так, в северных широтах России часто сейсмические данные имеются только на профилях, при этом сами профили могут быть расположены вдоль существующих автодорог и других транспортных путей, которые могут иметь достаточно большую кривизну. Последнее свойство является важным с точки зрения решения прямых и обратных задач: исторически разработанные методы «работают» в двумерном пространстве, которому соответствуют профили с нулевой или пренебрежимо малой кривизной, а для решения прямых и обратных задач на некоторых имеющихся профилях они не подходят.

В статье предлагается два новых метода для решения прямых задач на «плохих» профилях, оба со своими преимуществами и недостатками.

## Двумерная прямая задача

Будем говорить о гравитационной задаче, при этом имея в виду, что выводы распространяются и на геомагнитную задачу. Пусть имеется пространство, заданное двумя координатами – латералью \$x\$ и глубиной \$z\$ (ось \$z\$ направлена вниз). Обозначим как \$u(x)\$ вертикальную производную гравитационного потенциала (в дальнейшем – просто поле) на нулевой глубине (\$z = 0\$). В сеточном случае \$u\_i = u(i\Delta x)\$, \$i = 0, \dots, n-1\$. Также введем обозначение \$g(x; z)\$ – значения физического параметра (плотности), соответствующая сетка – \$g\_{i,k} = g(i\Delta x; z\_0 + k\Delta z)\$. Решаемая прямая задача состоит в нахождении поля по плотностям, заданным сеточной моделью. Поле и плотность связаны [3] между собой следующим соотношением:

$$u(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x; z) k(x - x_0; z) dz dx . \quad (1)$$

В (1) функция \$k(x; z)\$ задает поле точечного двумерного источника гравитационного поля с единичной «массой». Трехмерная интерпретация [4] имеет следующий вид: дополним пространство осью \$Oy\$, тогда функция \$k\$ задает поле от прямой, параллельной оси \$Oy\$, с единичной плотностью (на линейную единицу длины – м, см и т.п.). При этом часто говорят о цилиндрах, так как их поле вне цилиндра полностью аналогично полю плотной прямой.

Интеграл (1) легко решается численно за счет того, что функция поля точечного источника при фиксированной координате \$z\$ является ядром свертки и разрешает эффективный алгоритм, позволяющий найти решение через быстрые преобразования Фурье (БПФ) вдоль латеральной оси. При этом данные и результат задаются значениями на сетках.

Постановка сеточной задачи требует задания способа обработки краевых условий. Так, одним из вариантов является продолжение значений сетки, заданных на ее краях, в бесконечность. Мы используем отражение значений сетки, т.е., например, \$u\_i = u\_{-i}\$ для \$i = -1 \dots -n/2\$.

У такой постановки задачи есть очевидная проблема: при большой кривизне профиля цилиндры пересекаются друг с другом, функция поля точечного источника (при фиксированной глубине) перестает быть ядром свертки и т.п.

## Постановка прямой задачи на профиле

Сама постановка прямой задачи на профиле является затруднительной. Считаем заданными значения плотностей \$\tilde{g}(l; z)\$ (где \$l\$ – координата вдоль профиля, и в общем случае отличается от \$x\$, которая задает координату по латерали в двумерном модельном пространстве), но что обозначают эти плотности с позиции решения прямой задачи? Классически решается прямая задача 2D при предположении \$x = l\$. Далее же предлагается метод, в котором профильная модель многократно отображается на «синтетические» двумерные модели, и далее производится многократное решение прямых задач 2D уже на этих моделях.

Сначала фиксируется \$l\_0\$ – профильная координата точки, значение поля в которой необходимо

найти; далее заданное распределение плотностей на профиле  $\tilde{g}(l; z)$  отображается в «синтетическое» распределение плотностей  $g(x; z)$  в 2D; значение поля  $u(x(l_0))$  берется как искомое и находится численно. Заметим, что для каждого  $l_0$  строится своя «синтетическая» плотностная модель  $g(x; z)$ .

Приведем некоторые важные свойства, которые должны быть у такого отображения:

1. Для профиля, расположенного вдоль прямой, отображение должно быть тривиально:  $g(x; z) = \tilde{g}(x; z)$ . В этом случае решение задачи на профиле эквивалентно решению простой прямой задачи 2D (т.е. классическим методом).
2. Поле элемента плотностной модели должно выражаться через функцию  $k(x; z)$ , где переменная  $x$  должна быть пропорциональна расстоянию от элемента до точки поля на плане.
3. Однородная среда должна отображаться в также однородную среду.

### 1. Метод отображения

Пусть положение профиля на плане задано векторной функцией  $p = p(l)$ . Определим «расстояние на плане» от  $l$  до  $l_0$  как  $\|p(l) - p(l_0)\|$ , где  $\|\cdot\|$  – евклидова норма вектора. Определим функцию проецирования координат как  $r(l) = \text{sgn}(l_0 - l) \|p(l) - p(l_0)\|$ . Заметим, что это нелинейная проекция: проецирование производится вдоль дуг с центром в  $p(l_0)$  (см. рис. 1).

Можно отметить, что, используя эту функцию, уже можно определить простой способ отображения распределения плотностей, взяв  $x = r(l)$  и  $g(r(l); z) = \tilde{g}(l; z)$ . Оно удовлетворяет всем трем свойствам при условии, что расстояние является инъективной функцией профильной координаты  $l$ . В противном случае доопределим значение  $g(x; z)$  как среднее  $\tilde{g}(l; z)$  по всем  $l$ , для которых  $r(p(l)) = x$ :

$$g(x; z) = \frac{\sum \tilde{g}(l; z)}{M(\{\forall l: r(p(l)) = x\})} \quad (2)$$

В (2)  $M$  – количество элементов множества. Это отображение имеет важное ограничение: ни один участок кривой  $p(l)$  не должен совпадать с дугой окружности с центром в  $l_0$ , в противном случае имеем неопределенность вида  $\infty/\infty$ . Однако это не является проблемой, т.к. на практике профиль задается ломаной линией.

Проиллюстрируем формулу (2) на примере, изображенном на рис. 1. Профильные точки  $l_1, l_2, l_3$ , которым соответствуют координаты на плане  $p(l_1), p(l_2), p(l_3)$ , проецируются в координату  $x_1$  двумерного пространства; для других точек –  $l_4 \rightarrow x_4$  и  $l_5 \rightarrow x_5$ . Плотность 2D-модели в точке  $x_1$  равна средней плотности в соответствующих точках профиля:  $g(x_1; z) = 1/3(\tilde{g}(l_1; z) + \tilde{g}(l_2; z) + \tilde{g}(l_3; z))$ . Так как точкам  $x_4$  и  $x_5$  соответствует только одна профильная координата,

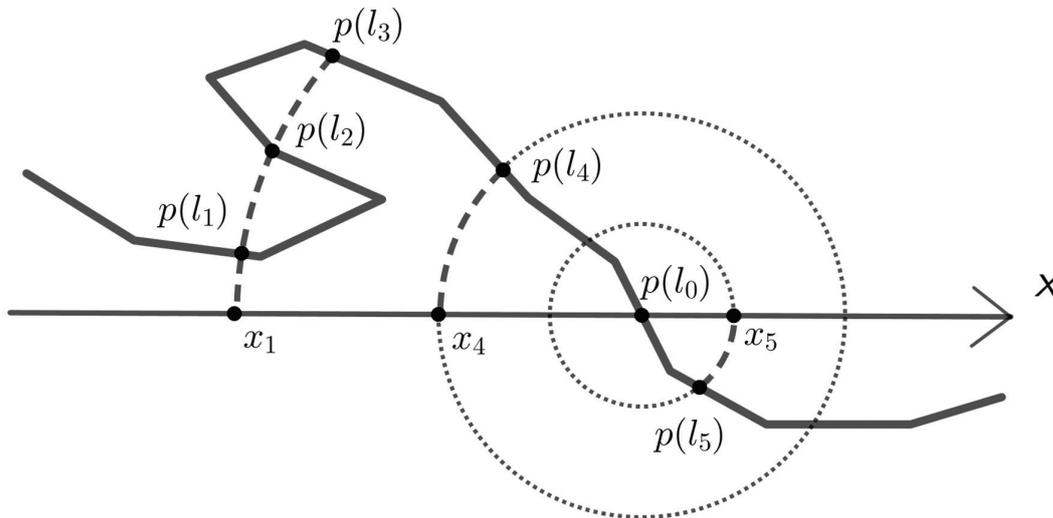


Рис. 1. Проецирование глубинного среза  $z = \text{const}$  профиля в 2D-пространство, определенное прямой  $Ox$ .  
 Обозначения: жирная сплошная линия – линия профиля;  
 тонкая сплошная линия – прямая результирующего 2D-пространства;  
 пунктирные дуги – дуги с центром в точке  $P(l_0)$ , по которым точки профиля проецируются в модельное 2D-пространство; тонкие точечные дуги – дополнения пунктирных дуг до окружностей

Fig. 1. Projection of profile  $z = \text{const}$  cross-section on 2D space, defined by line  $Ox$ . Keys: bold line – profile; thin line – line of resulting 2D space; dotted arcs – arcs with center in point  $P(l_0)$ , through which profile points are projected in 2D model space; thin dotted arc – complement of projection arcs in respective circles

то значения плотностей 2D модели в них равны, соответственно,  $\tilde{g}(l_4; z)$  и  $\tilde{g}(l_5; z)$ .

**2. Отображение профиля, заданного ломаной**

Далее опишем, как именно можно отображать профиль, заданный ломаной линией, на двумерное пространство в соответствии с определением (2).

Зафиксируем горизонтальный срез  $z = const$ . Пусть сеточная модель задана в виде значений плотности в профильных координатах  $l_i = 0 + i\Delta l, i = 0, \dots, n - 1$ . Для простоты работы с граничными элементами необходимо доопределить функцию  $p(l)$  для  $-\Delta l/2 < l < 0$  и  $\Delta l(n - 1) < l < \Delta l(n - 1) + \Delta l/2$ , если она на этих интервалах еще не определена. Это можно сделать, используя производную  $\nabla p(l)$ : тогда, например, в левом интервале  $p(l)|_{l < 0} = p(0) - l\nabla p(0) / \|\nabla p(0)\|$ .

**Простая форма**

Сначала выпишем более простую форму, которая является упрощением формулы (2) и эквивалентна ей только при выполнении следующего условия: для каждого полуинтервала  $l \in [i\Delta l - \Delta l/2, i\Delta l + \Delta l/2)$  функция проецирования координат на нем инъективна. Скажем, что элемент  $i$  «занимает» двумерное пространство от  $r_{i\min} = \min(r(p(l)))$  до  $r_{i\max} = \max(r(p(l)))$ ,  $l \in [i\Delta l - \Delta l/2, i\Delta l + \Delta l/2)$ . Инъективность функции отображения координат подразумевает ее монотонность, а, значит,  $r_{i\min}$  и  $r_{i\max}$  равны значениям функции отображения координат в точках  $i\Delta l - \Delta l/2$  и  $i\Delta l + \Delta l/2$  (но не обязательно в таком порядке).

Определим полуинтервал  $L_i = [r_{i\min}, r_{i\max})$ . Определим т.н. множество «элементарных интервалов»  $Q$  – минимальное (по мощности) множество непересекающихся полуинтервалов, множество объединений элементов которого содержит любой полуинтервал  $L_i$ . Обозначим  $Y(L_i)$  – подмножество элементарных полуинтервалов, включенных в  $L_i$ .

Плотностная модель строится по следующему принципу: каждому элементарному полуинтервалу задается значение плотности, определяющееся плотностями элементов  $L_i$ , включающих этот элементарный полуинтервал. С учетом этого перепишем (2) в следующем виде:

$$g(x; z)|_{x \in q_k} = \frac{\sum_{i: q_k \in L_i} \tilde{g}(i\Delta l; z)}{M(\{i : q_k \in Y(L_i)\})} \quad (3)$$

Простыми словами, для каждого элементарного полуинтервала его плотность равна средней плотности соответствующих им полуинтервалов  $L_i$ . Или, по-другому, каждый интервал  $L_i$  вносит равновесный вклад в окончательную плотность каждого элементарного интервала, с которым он пересекается.

Геометрический смысл построения двумерной модели иллюстрирует рис. 2. Участки кривой (ломаной) AB, BC и CD, каждый из которых соответствует одной точке среза профильной сетки, проецируются в отрезки  $L_1 = A'B', L_2 = B'C'$  и  $L_3 = C'D'$  и порождают элементарные интервалы  $\{B'C', C'A', A'D'\} \in Q$ . Пусть на участке AB значение плотности постоянно и равно  $g_1$ ,

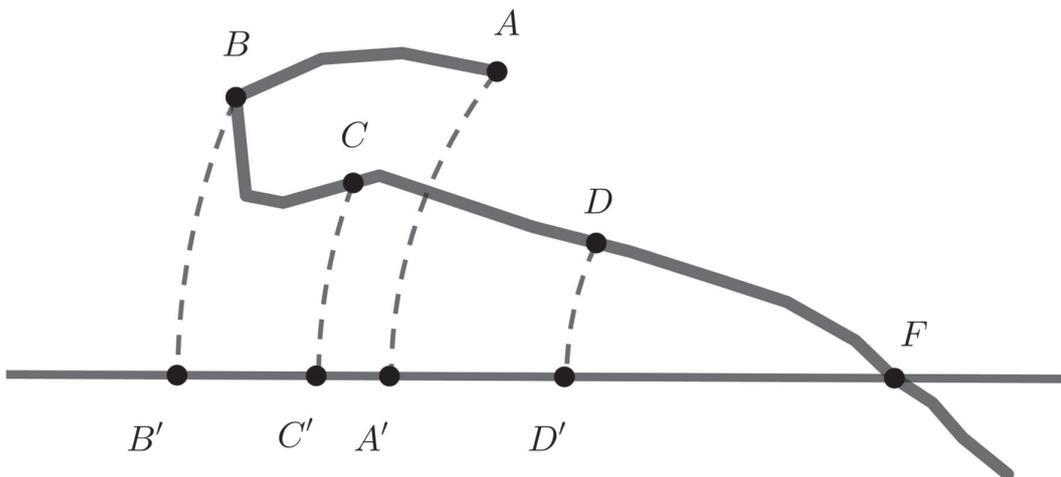


Рис. 2. Проецирование глубинного среза  $z = const$  профиля в 2D-пространство, определенное прямой  $B'F$ . Обозначения:  $F$  – точка, в которой вычисляется модельное поле; жирная сплошная линия – линия профиля; тонкая сплошная линия – прямая глубинного среза результирующего 2D-пространства; пунктирные дуги – дуги с центром в точке  $F$ , по которым точки профиля проецируются в модельное 2D-пространство

Fig. 2. Projection of profile  $z = const$  cross-section on 2D space, defined by line  $B'F$ . Keys:  $F$  – point in which model field is computed; bold line – profile; thin line – the line of the resulting 2D space; dotted arcs – arcs with center in point  $F$ , through which profile points are projected in 2D model space

на участке  $BC - g_2$  и  $CD - g_3$ . Тогда интервалу  $B'C'$  соответствует значение плотности  $0,5(g_1 + g_2)$ , интервалу  $C'A' - 0,5(g_1 + g_3)$ , интервалу  $A'D' - g_3$  и т.д. Точки профиля, лежащие по разные стороны от  $F$ , проецируются по разные стороны прямой  $B'F$ .

### Полная форма

Теперь рассмотрим случай, когда функция проецирования координат не инъективна внутри полуинтервалов  $l \in [i\Delta l - \Delta l/2, i\Delta l + \Delta l/2)$ .

Рассмотрим множество элементарных интервалов. В сущности, это множество можно получить, разбив все интервалы  $L_i$  по граничным точкам (других интервалов  $L_j$ ). Теперь же необходимо разбить каждый элементарный интервал далее – по образам вершин ломаной  $p(l)$ . Однако автором предлагается использовать альтернативный подход – разбивать сначала интервалы  $L_i$  вершинами ломаной, а затем на основе этих интервалов строить элементарные интервалы.

Пусть интервал  $L_i$  разбивается вершинами ломаной на множество подынтервалов  $L_i^{(s)}$ ,  $s \in S(i)$ . Способ нахождения этих интервалов отличается от способа, использованного в простой форме. По определению, каждый подынтервал имеет прообраз в виде отрезка или подотрезка ломаной  $p(l)$ . Тогда легко показать, что для того, чтобы вычислить границы этих подынтервалов, достаточно взять минимум и максимум по значениям  $r(p)$ , подставляя на место  $p$  три точки – две его границы и еще одну – «третью точку» – точку отрезка, ближайшую к  $p(l_0)$ .

Теперь если определить элементарные интервалы  $Q$  через  $L_i^{(s)}$  вместо  $L_i$ , то формула (3) становится корректной и для общего случая неинъективного проецирования координат.

Здесь можно сделать еще одно замечание: каждый такой подынтервал все равно может отображаться неинъективно, и тогда формула (3) не эквивалентна формуле (2). Это справедливо для случая, когда «третья точка» отображается в границу подынтервала. Это происходит, когда производная функции отображения координат меняет знак в этой точке. Таким образом, чтобы это исправить, достаточно проверить, что «третья точка» отображается в границу подынтервала, и разбить подынтервал еще раз по той из двух точек, которая отображается не на границу. Однако влияние такой погрешности достаточно мало, и далее в статье идет обсуждение реализации метода без учета этого замечания.

### Экстраполяция методом ближайшего соседа на трехмерную сетку

Обычно в контексте прикладных задач экстраполяция методом ближайшего соседа считается

самой «плохой», так как имеет порядок погрешности 1 (и алгебраический порядок точности 0). Однако заметим, что для профиля, направленного вдоль прямой, его экстраполяция этим методом в трехмерное пространство эквивалентна трехмерной интерпретации. Действительно, если в двумерной задаче пространство аппроксимируется двумерными шарами (то есть кругами), то они экстраполируются в бесконечные цилиндры. Это наводит на мысль об очень простом способе постановки и решения профильной прямой задачи: экстраполировать профиль методом ближайшего соседа на трехмерную сетку, решить прямую задачу и взять выборку двумерной модели поля вдоль профиля.

Если профиль задается ломаной, то вычислительно рациональна следующая схема: для каждой точки сетки находится ближайший к ней отрезок ломаной, строится проекция на отрезок, находится профильная координата этой проекции и берется значение плотности на профиле, соответствующее этой координате. Поиск ближайшего сегмента методом перебора строится слишком долго для интерактивной работы, поэтому для поиска ближайшего сегмента необходимо использовать пространственный индекс, например R-дерево [5]. В индекс необходимо добавлять каждый отрезок с данными о том, к какому профилю он принадлежит и какую профильную координату имеет начало отрезка.

Основные пункты метода выглядят следующим образом:

1. Выбрать трехмерную сетку, вмещающую профиль; при этом сетка оси  $Oz$  у трехмерной сетки и у профиля должна быть одинаковая.
2. Построить R-дерево сегментов профиля.
3. Для каждой точки сетки:
  - а) найти ближайший сегмент;
  - б) найти проекцию на профиль, используя данные о сегменте;
  - с) найти (вычислить) и записать значение плотности для каждой  $z$ -координаты сетки.
4. Решить трехмерную прямую задачу [3].
5. Для двумерного поля построить сечение вдоль пролегания профилей.

### Апробация методов на модельных данных

Введем следующие обозначения:

1. Метод «А» – классический метод решения прямой задачи 2D.
2. Метод «В» – описанный выше метод решения прямой задачи на профиле методом многократного построения проекций на 2D-пространство, учитывающий кривизну профиля.

3. Метод «С» – метод, основанный на экстраполяции в 3D-пространство методом ближайшего соседа.

Так как метод «А» классически используется для решения прямой задачи на профиле, в первую очередь производится сравнение других методов именно с ним. За оценку каждого метода взято отклонение результата решения прямой задачи этим методом от эталонного поля по  $L_2$ -норме (корень суммы квадратов); чем меньше значение оценки, тем метод «лучше».

### 1. Модель плотностного скачка

Продемонстрируем эффективность методов на модели плотностного скачка. Построим квадратную сетку, разрезанную вдоль плоскости, перпендикулярной оси  $Ox$ , на две половины, при этом у одной половины плотность задана равной нулю, у второй – 1 (г/см<sup>3</sup>). Размер сетки – 512×512×40 точек (кубических блоков 1×1×1 км), разрез проходит поперек оси  $Ox$  на расстоянии 249,5 км от начала координат (совпадающего с одной из угловых точек сетки).

На ней строятся и исследуются отдельно два профиля, пересекающие указанный скачок. Один профиль выглядит в виде буквы «Т» со сдвоенной вертикальной чертой, второй представляет собой синусоиду, проходящую вдоль упомянутой оси (см. рис. 3). Профиль «Т» начинается и заканчивается на расстоянии 40 км от края сетки, сдвоенная линия находится на расстоянии 4 км от разреза; длина сдвоенной линии составляет 200 км. Вторым профилем на плане представлен ломаной, аппроксимирующей синусоиду; ломаная состоит из 2000 вершин; координата  $x$  меняется линейно от 20 до 480 км,  $y(x) = 250 + 6\sin(x/3)$  км.

Профиль «Т» выбран специально как очень неудобный для 2D-задачи и хорошо демонстрирует ее недостатки. Результаты решения прямой задачи

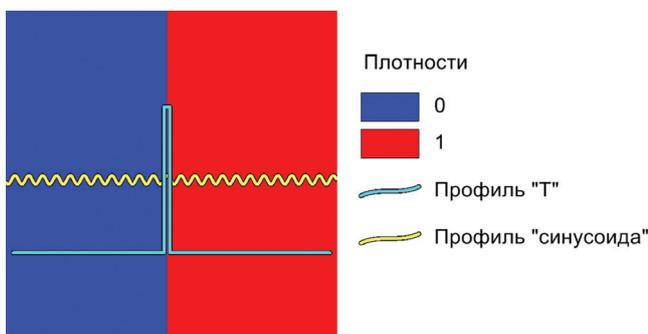


Рис. 3. Модель скачка плотности и профили на плане

Fig. 3. Model of density discontinuity and the profiles on the surface plan

3D и 2D методами «А» и «В» представлены на рис. 4. За эталон необходимо считать сечение решения прямой задачи в 3D. Из вычисленного поля вычитается среднее значение по сетке, поэтому возникает эффект отрицательного поля от «вещества» с нулевой плотностью.

На этом примере хорошо видно, что решение, полученное методом «В», намного ближе к эталонному, чем методом «А». Заметим, что интервал от 200 до 400 км вдоль профиля соответствует одной половине вертикальной черты буквы «Т» (а также симметричный ему интервал от 420 до 620 км), и именно на нем особенно заметно отклонение решения методом «А» от эталонного поля. Отклонение решения методом «В» от эталонного решения составляет 50,78% от отклонения метода «А».

На рис. 5 изображены результаты решения прямых задач на профиле «синусоида». В этом случае разница не такая резкая (по сравнению с профилем «Т»). Прямая задача 2D все также выглядит, как будто имеется простой скачок плотностей поперек профиля, а прямая задача 3D имеет дополнительные гармоники, соответствующие искривлениям профиля; в случае же метода «В» эти гармоники даже сильнее. Это может создать проблемы при интерпретации поля. С одной стороны, решение методом «В» ближе к эталонному по норме. С другой – усиленные гармоники могут быть нежелательны, т.к. создают в каком-то смысле фантомные эффекты: например, по виду поля можно сделать качественный вывод о том, что на расстоянии 370 и 400 км от начала профиля есть какие-то дополнительные приповерхностные разуплотнение и уплотнение соответственно, хотя в плотностной модели, от которой рассчитано поле, их нет.

В случае синусоидального профиля отклонение метода «В» составляет 66,31% от отклонения метода «А».

Результаты решения прямой задачи методом экстраполяции не приведены, т.к. в этом случае результат решения прямой задачи примерно равен эталонной просто по построению плотностной модели и профилей.

### 2. Апробация на плотностной модели территории Хатангского прогиба

Вторая модель представляет собой модель, полученную методом построения эквивалентного перераспределения эффективных плотностей, основанном на дискретных преобразованиях Фурье [7], на территории Хатангского прогиба. Сразу же необходимо отметить, что автор не ставил задачу построения геофизической интерпретации или даже построение сколько-нибудь предметно-адекватной

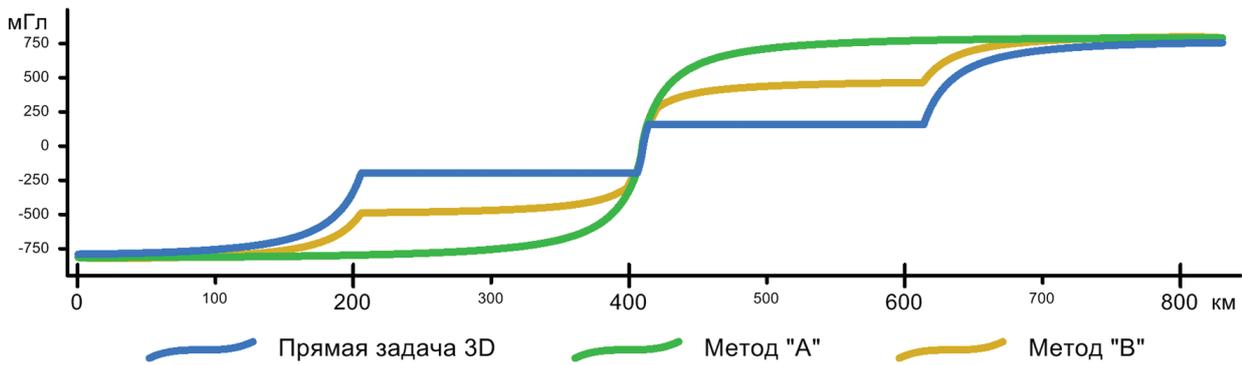


Рис. 4. Результаты решения прямой задачи на профиле «Т»

*Fig. 4. Solutions of forward problem on the «T» profile*

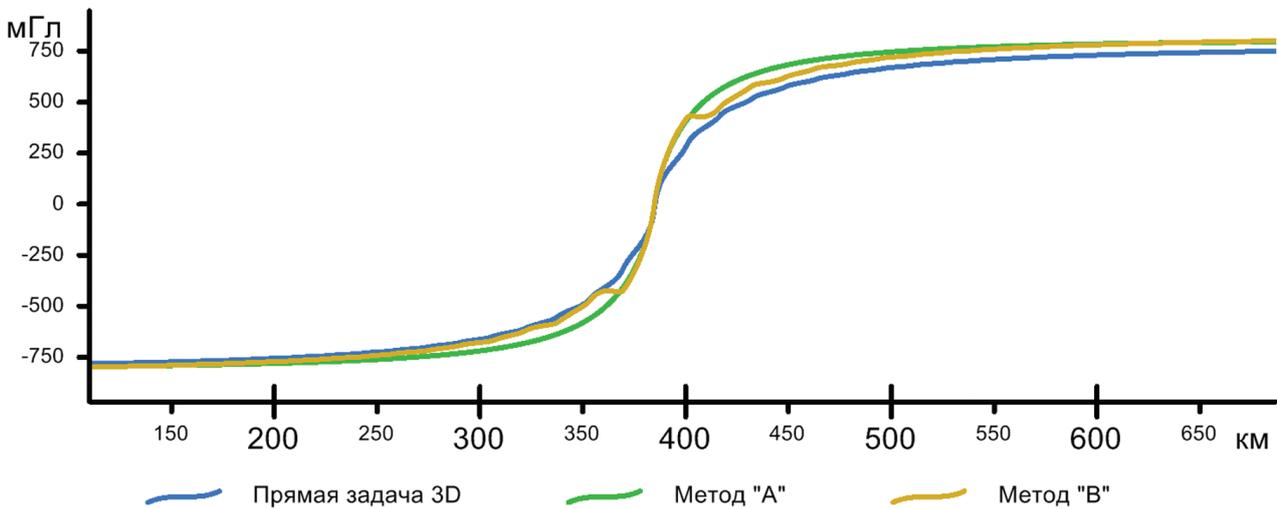


Рис. 5. Результаты решения прямой задачи на профиле «синусоида»

*Fig. 5. Solutions of forward problem on the «sine» profile*

3D-модели. Однако для демонстрации метода решения прямых задач на профилях использование такой модели оправданно.

Поле, профили и срез эквивалентного перераспределения представлены на рис. 6.

В данном примере только некоторые профили имеют большую кривизну, однако в связи с тем, что профилей много и они пересекаются (образуют сеть), можно ожидать интересных результатов при решении прямой задачи методом «С».

Для поля была построена экстраполяция методом решения краевой задачи [6], после чего была построена эквивалентная плотностная 3D-модель методом центральной спектральной проекции с параметрами  $\alpha = 5$ ,  $\beta = -3$ . Сетка строилась на глубину до 40 км (рис. 6б). Далее был построен набор

профилей сечением этой модели вдоль профильных линий. Были получены решения прямой задачи на профилях, также была построена плотностная 3D-модель экстраполяцией методом ближайшего соседа (рис. 6г), для нее была решена прямая задача (рис. 6в), и полученное поле также было усечено вдоль линий профилей.

Для профилей 619-625, имеющих в плане вид прямой или незначительно ломаной линии, разница между методами «В» и «А» незначительна, причем для профиля 601 отклонение метода «В» от эталонного поля даже больше, чем для метода «А». Это объясняется в первую очередь случайными факторами. С другой стороны, для изогнутых профилей метод «В» показывает результаты лучше, чем классический метод «А».

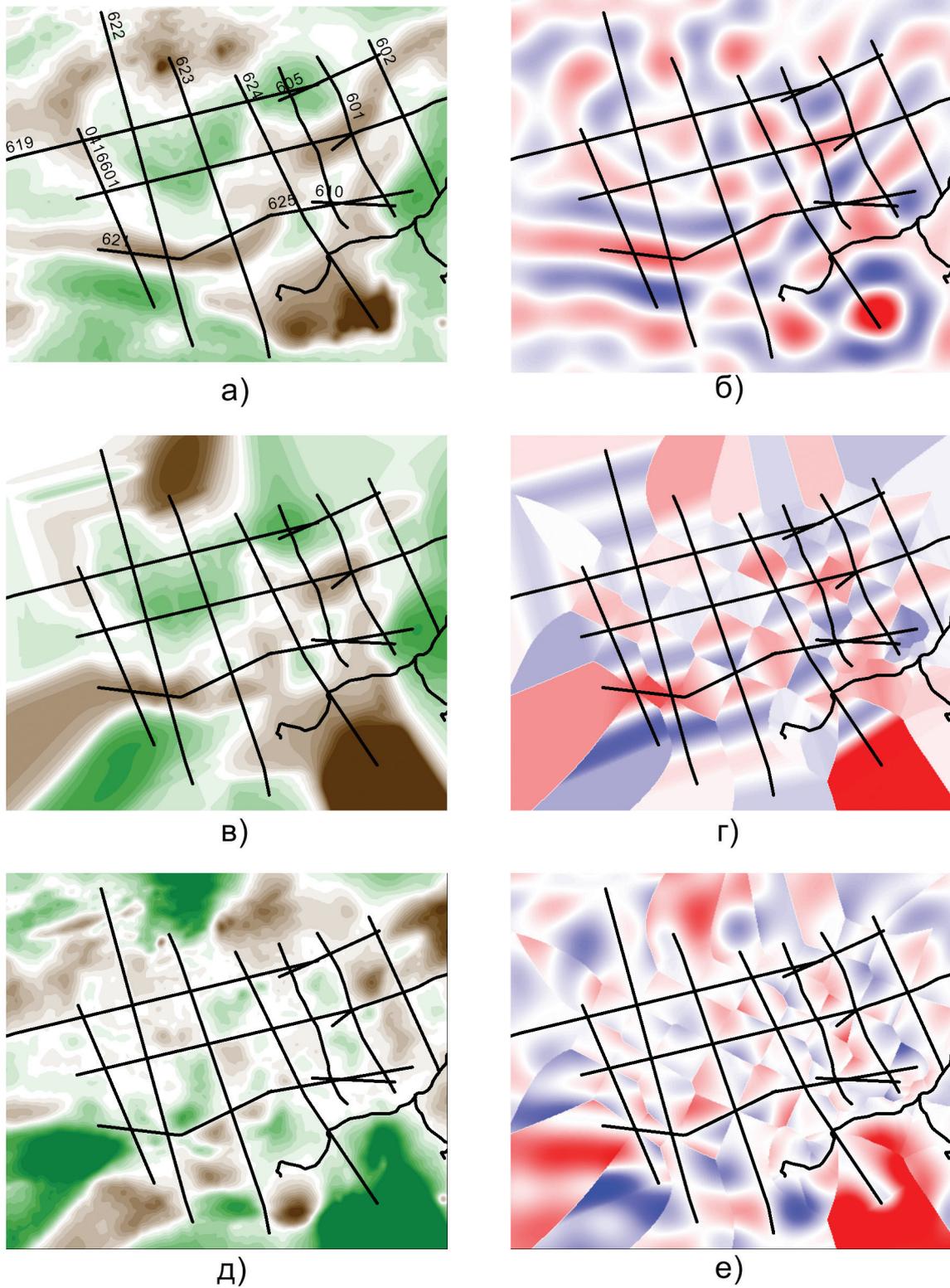


Рис. 6. Поле и сейсмические профили территории Хатангского прогиба:  
 а) исходное поле; б) горизонтальный срез эквивалентного перераспределения на глубине 10 км;  
 в) поле для экстраполированной модели; г) экстраполированная модель;  
 д) невязка между исходным полем и полем экстраполированной модели;  
 е) разница между экстраполированной моделью и эквивалентным распределением

*Fig 6. Field and seismic profiles on the territory on Khatanga depression: a) source field; б) horizontal cross-section of the equivalent density distribution; в) field for extrapolated model; г) extrapolated model; д) field residual for respective extrapolated model and source field; е) difference between extrapolated model and the equivalent density distribution*

Метод «С» показал результаты лучше, чем метод «А», на всех профилях, кроме 625. Это объясняется особенностью построенного эквивалентного распределения эффективных плотностей: на рис. 6г изображена повышенная плотностная невязка севернее восточной части этого профиля. На некоторых других профилях выигрыш незначителен, а наиболее сильное уменьшение ошибки соответствует профилям с большим относительным отклонением решения методом «А» от эталонного поля.

Отдельно стоит рассмотреть профиль 624: в своей южной части он пересекает небольшую по латерали, но большую по амплитуде гравитационную аномалию. Так как профиль далеко отстоит от других, размеры этой аномалии в случае двумерной интерпретации сильно переоцениваются (рис. 7б). В экстраполяции этот профиль окружен объемом со значительным отклонением плотности, однако рассчитанное методом «С» поле все равно намного ближе к эталону, чем поле, рассчитанное методом «А». Отличие в результатах метода «С» от похожей ситуации на профиле 625 прежде всего в том, что на

профиле 624 все методы имеют большую ошибку, в то время как для профиля 625 ошибка метода «А» изначально маленькая.

Наиболее удачный результат для метода «С» достигнут на профиле 620 (рис. 7а) – это субширотный профиль, находящийся между профилями 619 и 621 и пронизанный пятью субмеридиональными профилями, поэтому для него имеется много информации о плотности в его окружении. Результат решения прямой задачи методом «С» превосходит результат классического метода на порядок. С другой стороны, в связи с тем, что профиль почти «прямой», результаты решения прямой задачи методом «В» и «А» почти не отличаются друг от друга.

На профилях с большой кривизной – 481601 и 5109302 – результаты методов «В» и «С» также ближе к исходному полю, чем метода «А»; на профиле 4816612 разница не так велика, но на нем, опять же, метод «А» изначально имеет малое отклонение от исходного поля.

Графики полей для некоторых профилей представлены на рис. 7; результаты – в табл. 1.

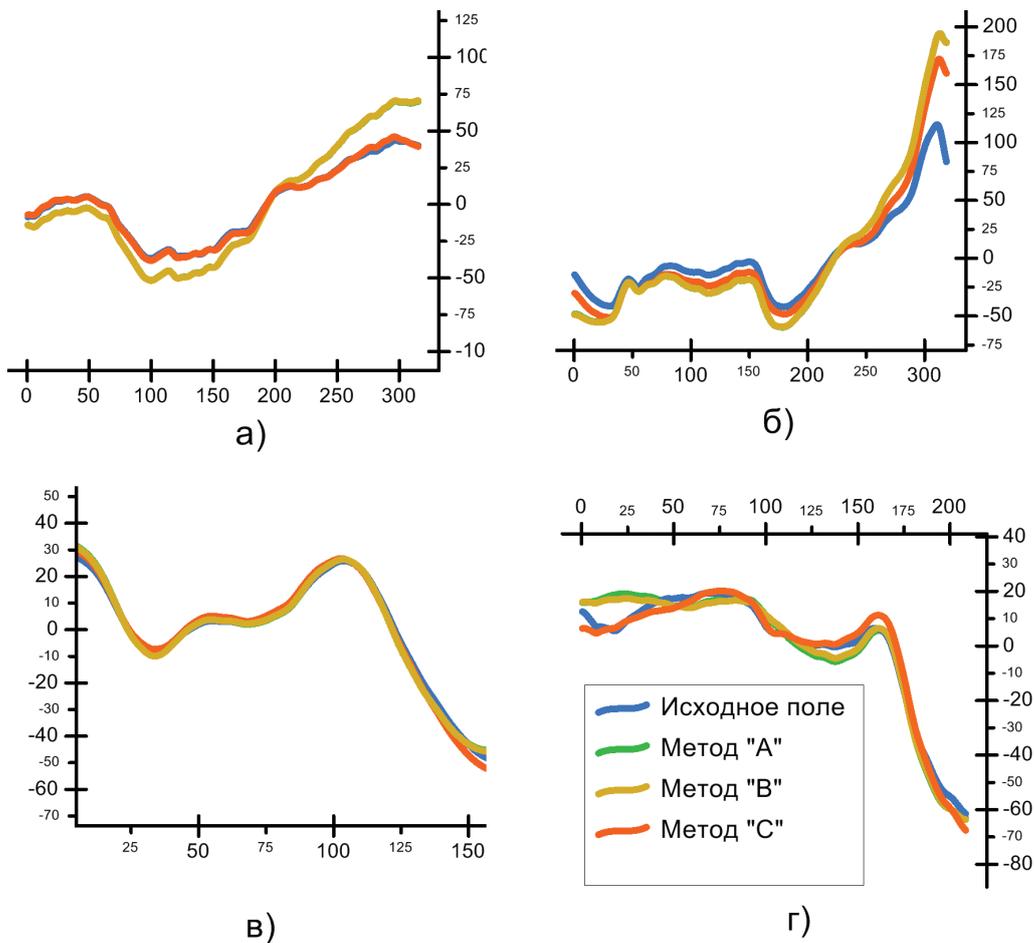


Рис. 7. Исходное поле и рассчитанные различными методами на профилях: а) 620; б) 624; в) 625; г) 481601

Fig. 7. Source field and fields, computed with different methods, on profiles: a) 620; b) 624; c) 625; d) 481601

Таблица 1

**Ошибки в решениях прямых задач на профилях различными методами (единицы: мГал)**

*RMSE for forward problem solutions on profiles for different methods (Units: mGal)*

Профиль	RMSE Метод «А»	RMSE Метод «В»	% от «А»	RMSE Метод «С»	% от «А»
416601	5,864589	5,906518	100,7149	4,583805	78,16071
622	4,84266	4,843866	100,0249	3,556386	73,43868
601	2,519392	2,794534	110,921	1,414279	56,13575
602	7,143491	7,364077	103,0879	1,940138	27,15952
605	5,526402	5,719761	103,4988	1,211465	21,92141
606	9,718677	9,888337	101,7457	3,465237	35,65544
607	7,637582	7,866561	102,9981	2,434935	31,88097
610	3,993931	3,755734	94,03602	0,874723	21,90131
619	11,15988	11,20685	100,4208	1,114759	9,988981
620	14,13048	14,29293	101,1496	1,082563	7,661191
621	17,72046	17,78746	100,3781	6,302135	35,56418
623	4,931253	4,942078	100,2195	2,682159	54,39102
624	25,27016	25,21412	99,77823	16,39982	64,898
625	1,743954	1,636075	93,81415	1,972593	113,1104
481601	4,7737	4,199207	87,96546	2,715677	56,8883
4816612	1,905742	1,860726	97,63789	1,849861	97,0678
5109302	3,078816	2,529518	82,15878	2,606999	84,67537

**Сравнение методов**

Оба описанных метода имеют преимущество по сравнению с простым методом решения прямой задачи 2D, заключающееся в том, что они учитывают кривизну профилей.

Преимущества метода «В»:

1. Слабая зависимость профилей друг от друга. Одной из важных задач, в рамках которой необходимо решать прямую задачу, является подбор параметров плотностной блочной, слоисто-блочной и др. моделей. Для классического метода «А» и для метода «В» важно только увязывать значения плотностей в точках пересечения профилей; сами же значения плотностей не влияют на поле на соседних профилях, в отличие от метода, основанного на экстраполяции.
2. Этот метод, по сравнению с методом «С», не требует определения сетки, покрывающей исследуемую территорию. Определение подходящих параметров сетки – отдельная

нетривиальная задача, которую необходимо выполнить для метода «С».

Преимущества метода «С»:

1. При расчете прямой задачи используются данные соседних профилей, что позволяет повысить точность решения.
2. Метод позволяет составлять более тесную интеграцию с 3D-моделированием, что важно для случаев, когда именно составление 3D-модели территории является конечной целью моделирования.

Особенностью метода «С» является то, что при его применении появляется два промежуточных результата, поддающихся интерпретации: плотностная 3D-модель и 2D-модель поля. Это является и преимуществом и одновременно недостатком. Пример контроля промежуточного результата представлен в статье в апробации этого метода на профиле 625. В этом случае этот метод дал результат хуже, чем прямая задача 2D, что объясняется именно особенностью промежуточной плотностной модели.

Для определения проблемы необходимо определить эту особенность, проанализировав плотностную модель; для повышения точности результата – произвести с ней дополнительные преобразования. Таким образом, с одной стороны, возможность контроля промежуточных результатов позволяет повысить точность решения прямой задачи; с другой стороны, необходимость контроля замедляет процесс решения задачи.

Важный недостаток обоих новых методов состоит в отсутствии инвариантности формы поля ячейки плотностной модели профиля от операции трансляции (переноса) источника по латерали. То есть от разных источников одной плотности и на одной глубине форма поля может быть разной. Это затрудняет, например, интерпретацию модели, а также процесс поиска решения обратной задачи методом подбора.

Краткое сравнение методов представлено в табл. 2.

Стоит отметить связь метода «С» с 2½-мерными (2.5D) моделями. Чаще всего под 2.5D подразумевают такой тип моделей, у которых физический параметр однороден вдоль второй латеральной оси, идущей поперек профиля [8], причем модель конечна вдоль этой оси и ее протяжение постоянно. Некоторые авторы выделяют отдельный класс моделей – 2.75D, говоря о моделях, у которых протяжение меняется в зависимости от координат  $x$  и  $z$  [9]. Метод «С», в свою очередь, подразумевает такое построение модели, при котором может использоваться информация из целого набора профилей, а не только из одного. Продолжая морфологическую традицию, такую модель можно было бы назвать 2.875D (2¾-мерной).

### Заключение

В статье представлены два новых метода решения прямых геопотенциальных задач на профиле, произведено их сравнение с классическим методом решения прямой задачи 2D, выявлены сильные и слабые стороны всех трех методов. По мнению автора, каждый из трех методов имеет свою область применения и выбор конкретного должен производиться с учетом особенностей имеющегося набора данных.

В качестве дальнейших исследований автором видится попытка учета того, что большая кривизна профиля может давать больше информации о плотностях в окружающем профиль объеме. Так, если около точки измерения профиль настолько кривой, что оболочка небольшой толщины вокруг профиля охватывает большую часть объема, окружающего точку, то это значит, что о плотностях вокруг точки имеется больше информации, чем о плотностях на удалении от нее. В этом случае можно было бы назначить веса отдельным интервалам, отталкиваясь от того, насколько хорошо известны плотности на этих расстояниях от точки измерения. С этой точки зрения перспективным выглядит направление, связанное с построением вероятностной плотностной модели и, например, применением метода максимального правдоподобия к значению поля по известным вероятностным распределениям плотностей.

Также представляет интерес исследование с точки зрения сопряжения метода экстраполяции с 2.5D моделями. Ввод ограничений на максимальное расстояние экстраполяции выглядит интересно с точки зрения соответствия «духу» 2.5D-моделирования. Потенциальным полем для исследований выглядит поиск быстрых методов и алгоритмов экстраполяции,

Таблица 2

### Сравнение описанных методов решения прямой задачи

#### *Comparison of the methods for forward problem solving*

Метод	«А»	«В»	«С»
Учитывается кривизна профиля	–	+	+
Профили не зависят друг от друга	+	+	–
Учитываются данные на соседних профилях	–	–	+
Независимость от сеток на плане	+	+	–
Тесная интеграция с 3D-моделью	–	–	+
Промежуточный контроль	нет	нет	есть
Инвариант к трансляции по латерали	+	–	–

не создающих резких перепадов плотностей (см. рис. 5г).

**Ключевые слова:** гравитационное и магнитное поля, профильные модели, прямая задача гравиразведки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Никитин А.А., Галуев В.И., Пиманова Н.Н. О стандартном графе обработки и интерпретации гравитационных и магнитных полей при построении плотностных и магнитных моделей земной коры // Геофизика. – 2015. – № 6. – С. 74-80.
2. Гришина И.Л., Малинина С.С. Технология построения согласованных 2D и 3D магнитно-плотностных моделей земной коры в среде ГИС ИНТЕГРО // Геоинформатика. – 2015. – № 3. – С. 39-49.
3. Блох Ю.И. Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий : учебное пособие. – М. : РГГРУ, 2009. – 232 с.
4. Гравиразведка. Справочник геофизика / под ред. Е.А. Мудрецов, К.Е. Веселова. – М. : Недра, 1981. – 397 с.
5. Guttman A. R-Trees: A Dynamic Index Structure for Spatial Searching // SIGMOD 1984 : Proceedings of the 1984 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data. – New York : ACM, 1984. – V. 14, No. 2. – P. 47-57.
6. Мицын С.В., Ососков Г.А. Экстраполяция сеточных моделей геофизических полей методом конечных разностей // Геоинформатика. – 2016. – № 3. – С. 29-34.
7. Мицын С.В. О численной реализации спектрального метода решения обратной задачи гравиразведки // Геоинформатика. – 2018. – № 3. – С. 89-97.
8. Shuey R.T., Pasquale A.S. End corrections in magnetic profile interpretation // Geophysics. – 1973. – V. 38, Issue 3. – P. 507-512.
9. Dentith M., Mudge S. Geophysics for the Mineral Exploration Geoscientist. – Cambridge : Cambridge University Press, 2014. – 454 p. – doi:10.1017/CBO9781139024358.

#### REFERENCES

1. Nikitin A.A., Galuev V.I., Pimanova N.N. About the standard graph processing and interpretation of gravity and magnetic fields in constructing the density and magnetic model earth's crust // Geophysics. 2015. No. 6. P. 74-80.
2. Grishina I.L., Malinina S.S. The technology for creating 2D & 3D models of the earth crust, which are fitted with each other by the gravitational and magnetic fields, in the GIS INTEGRO environment // Geoinformatics. 2015. No 3. P. 39-49.
3. Blokh Y.I. Interpretation of gravity and magnetic anomalies. Moscow : RSGPU, 2009. 232 p.
4. Gravity survey. Geophysics reference book / Ed. by E.A. Mudretsova and K. E. Veselov. Moscow : Nedra, 1981. 397 p.
5. Guttman A. R-Trees: A Dynamic Index Structure for Spatial Searching // SIGMOD 1984 : Proceedings of the 1984 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data. – New York : ACM, 1984. V. 14, No. 2. P. 47-57.
6. Mitsyn S.V., Ososkov G.A. Finite difference method for numerical extrapolation of grid models of geophysical fields // Geoinformatics. 2016. No. 3. P. 29-34.
7. Mitsyn S.V. On numeric implementation of spectral method of gravimetry inverse problem. Geoinformatics. 2018. No. 3. P. 89-97.
8. Shuey R.T., Pasquale A.S. End corrections in magnetic profile interpretation // Geophysics. – 1973. V. 38, Issue 3. P. 507-512.
9. Dentith M., Mudge S. Geophysics for the Mineral Exploration Geoscientist. Cambridge : Cambridge University Press, 2014. 454 p. doi:10.1017/CBO9781139024358.