

УДК 550.834, 519.633.2

© А.А. Никитин, Б.Д. Плющенко

А.А. Никитин, Б.Д. Плющенко

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕЙСМОАКУСТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ВЯЗКОУПРУГИХ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ СРЕДАХ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

Введение

Численное моделирование распространения акустических волн, используя чисто упругие среды, давно применяют на практике [1, 2]. Тем не менее, обоснованность такого применения в зависимости от целей задачи не всегда бывает оправданной, так как часто имеется явное наличие внутренних механизмов диссипации акустической энергии [1]. Так, в сейсморазведке замечено, что в используемом диапазоне частот продольные и поперечные волны имеют практически постоянные затухания [3]. Поэтому представляется, например, проводить динамический анализ сейсмического поля, используя модели вязкоупругих сред, которые являются, как правило, также линейными и из которых наиболее общей является модель стандартного линейного тела [3, 4]. Основываясь на этой модели, авторами были предложены модифицированные уравнения Био [5] для вязкоупругой однородной изотропной флюидонасыщенной пористой среды. Предполагалось, что дополнительный механизм поглощения в пористой среде связан в значительной степени не с материалом каркаса, а с коэффициентами объемной и сдвиговой сцементированности матрицы, отражающими межгранулярное взаимодействие. Предложенная модель является более целостной в отличие от ранее рассмотренных [6, 7]. Она может использоваться для моделирования лабораторного эксперимента на пористых образцах, так как именно на используемых в нем высоких частотах, на наш взгляд, коэффициенты сцементированности будут проявлять свои вязкие свойства [8, 9]. При моделировании акустического каротажа в коллекторах, когда частоты являются более низкими, по-видимому, достаточно воспользоваться «классической» моделью Био [10]. Как частный случай, предложенная модель может применяться для моделирования вязкой жидкости и задач сейсморазведки, когда пористость упругих или вязкоупругих сред равна нулю. В сейсморазведке из-за больших масштабов для коллекторов часто применяют уравнение Гассмана [11], которое можно получить из уравнений Био в низкочастотном пределе.

Для численной реализации модифицированных уравнений Био была построена конечно-разностная схема на сдвинутых сетках в цилиндрических координатах, которая является явной и имеет второй порядок точности. Она включает зависимость решения от азимутального угла [12], что позволило моделировать такие различные типы источников, как монополь, диполь и квадруполь, – в жидкости, концентрированную силу, диполь и центр расширения – в упругой среде [13]. Предложенная модифицированная модель Био включает свертки по времени с экспоненциальными ядрами, поэтому для их вычисления использовался доказанный экономичный способ [14, 15].

Работа организована следующим образом. В первом параграфе дается описание вязкой упругости с позиции модели стандартного линейного тела и способ аппроксимации упругих модулей рациональными функциями. Во втором – представлена система модифицированных уравнений Био в частотном представлении, в третьем – эта же система во временном представлении, и приводится способ ее решения. В четвертом параграфе рассматриваются условия на границах разрывов различных сред и на внешней границе. В пятом – описываются принципы построения конечно-разностной схемы, подробно представленной ранее в [12], и в шестом параграфе рассматривается экономичный способ вычисления свертки с экспоненциальным ядром [14, 15]. Численные примеры моделирования лабораторного эксперимента, дипольного акустического каротажа и в сейсморазведке приводятся и анализируются в седьмом, восьмом и девятом параграфах соответственно. По возможности численные результаты сравниваются с аналитическими.

1. Вязкая упругость

Считается, что модель стандартного линейного тела лучше подходит для описания горных пород [3, 4]. В одномерной модели и при наличии одного механизма релаксации связь между напряжением $\sigma(t)$ и деформацией $\varepsilon(t)$ описывается выражением

$$\sigma(t) + \tau_\sigma \partial_t \sigma(t) = M(\varepsilon(t) + \tau_\varepsilon \partial_t \varepsilon(t)), \quad (1)$$

где M – упругий модуль, τ_σ – время релаксации напряжения при постоянной деформации, τ_ε – время релаксации деформации при постоянной нагрузке.

Уравнение (1) в частотном представлении (ω) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(\omega) &= \hat{M}(\omega) \hat{\varepsilon}(\omega), \\ \hat{M}(\omega) &= M \frac{1 + i\omega\tau_\varepsilon}{1 + i\omega\tau_\sigma} = \\ &= M \left(1 + \frac{\omega^2 \tau_\sigma (\tau_\varepsilon - \tau_\sigma)}{1 + \omega^2 \tau_\sigma^2} + \frac{\omega (\tau_\varepsilon - \tau_\sigma)}{1 + \omega^2 \tau_\sigma^2} i \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где i – комплексная единица. Безразмерный коэффициент $Q_M(\omega) = \text{Re}(\hat{M}(\omega)) / \text{Im}(\hat{M}(\omega))$ есть характеристика внутреннего трения. Его называют добротностью или вязкоэластичным Q -фактором. Он характеризует относительную потерю энергии за один период колебаний и является неотрицательным, соответственно, должно выполняться условие $\tau_\varepsilon > \tau_\sigma$.

При наличии N различных механизмов релаксаций

$$\begin{aligned} \hat{M}(\omega) &= M \left(1 + \sum_{n=1}^N \frac{\omega^2 \tau_{\sigma n} (\tau_{\varepsilon n} - \tau_{\sigma n})}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma n}^2} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^N \frac{\omega (\tau_{\varepsilon n} - \tau_{\sigma n})}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma n}^2} i \right) = \\ &= M e_M(\omega) \left(1 + \frac{i}{Q_M(\omega)} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q_M(\omega)} &= \frac{1}{e_M(\omega)} \sum_{n=1}^N (\tau_{\varepsilon n} / \tau_{\sigma n} - 1) \frac{\omega \tau_{\sigma n}}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma n}^2}, \\ e_M(\omega) &= 1 + \sum_{n=1}^N (\tau_{\varepsilon n} / \tau_{\sigma n} - 1) \frac{\omega^2 \tau_{\sigma n}^2}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma n}^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

При сейсмических исследованиях установлено [3], что для продольной волны L (longitudinal) ее скорость V_L и затухание, определяемое Q_L -фактором, остаются практически постоянными в достаточно широком диапазоне частот. Значения этих параметров могут быть оценены на пиковой частоте излучателя f_{peak} . Тогда волновое число $k_L(\omega)$ продольной волны, распространяющейся вправо, представим в виде

$$k_L(\omega) = \frac{\omega}{\hat{V}_L} = \frac{\omega}{V_L} \left(1 - \frac{i}{2Q_L} \right). \quad (5)$$

Откуда для модуля $B = \rho V_L^2$, где ρ – плотность породы, из выражения (5) получим

$$\begin{aligned} \hat{B}(\omega) &= \rho \hat{V}_L(\omega)^2 = \rho V_L^2 \left(1 + \frac{i}{2Q_L} \right)^{-2} = \\ &= B \frac{1 - \xi_L^2}{(1 + \xi_L^2)^2} \left(1 + \frac{i}{Q_L^*} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\xi_L = (2Q_L)^{-1} \leq 0,5$ и $Q_L^* = (1 - \xi_L^2)Q_L$. Предполагается $Q_L \geq 1$.

Если в выражении (4) положить $\omega_n = 1/\tau_{\sigma n}$ и $b_n = \tau_{\varepsilon n} / \tau_{\sigma n} - 1$, то для Q_L^* -фактора оно преобразуется к виду

$$\frac{1}{Q_L^*} = \frac{1}{e_L(\omega)} \sum_{n=1}^N b_n \frac{(\omega/\omega_n)}{1 + (\omega/\omega_n)^2}, \quad (7)$$

$$\text{где } e_L(\omega) = 1 + \sum_{n=1}^N b_n \frac{(\omega/\omega_n)^2}{1 + (\omega/\omega_n)^2}.$$

В [16] показано, что Q_L^* -фактор, имеющий постоянное значение в частотном диапазоне, в котором нижняя f_{min} и верхняя f_{max} частоты отличаются на два порядка, можно аппроксимировать рациональным выражением вида (7) с относительной погрешностью, не превышающей 10%, используя три механизма релаксации. В частности, такое разложение можно получить с помощью метода наименьших квадратов, полагая $\omega_1 = 2\pi f_{\text{min}}$, $\omega_3 = 2\pi f_{\text{max}}$ и $\omega_2 = \sqrt{\omega_1 \omega_3} \approx \omega_{\text{peak}} = 2\pi f_{\text{peak}}$.

Рациональное приближение вида (7) может быть применено и для частотных зависимостей $Q_L^*(\omega)$ -фактора с использованием, возможно, больших значений L [16].

Подставив выражение (7) в (6), после преобразований получим

$$\begin{aligned} \hat{B} &= \tilde{B} e_L(\omega) \left(1 + \frac{i}{Q_L^*} \right) = \\ &= (\tilde{B} + \tilde{b}) - \tilde{b} \sum_{n=1}^3 \frac{\tilde{b}_n}{1 + i\omega/\omega_n} = \\ &= (\tilde{B} + \tilde{b}) - \tilde{b} \sum_{n=1}^3 \frac{\tilde{b}_n \omega_n}{\omega_n + i\omega}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{где } \tilde{b} = \tilde{B} \sum_{n=1}^3 b_n, \quad \tilde{b}_n = \frac{\tilde{B}}{\tilde{b}} b_n, \quad \sum_{n=1}^3 \tilde{b}_n = 1,$$

$$\tilde{B} = \frac{B}{e_L(\omega)} \frac{1 - \xi_L^2}{(1 + \xi_L^2)^2}.$$

Из представления (8) следует, что $\hat{B} = \tilde{B}$, когда $\omega = 0$, и $\hat{B} = \tilde{B} + \tilde{b}$, когда $\omega = \infty$.

Аналогичное разложение можно получить для сдвигового модуля $G = \rho V_S^2$, где V_S – скорость поперечной волны S (shear), часто распространяющейся с затуханием $Q_S < Q_L$:

$$\hat{G} = \tilde{G} e_s(\omega) \left(1 + \frac{i}{Q_s^*} \right) = (\tilde{G} + \tilde{g}) - \tilde{g} \sum_{n=1}^3 \frac{\tilde{g}_n}{1 + i\omega/\omega_n} =$$

$$= (\tilde{G} + \tilde{g}) - \tilde{g} \sum_{n=1}^3 \frac{\tilde{g}_n \omega_n}{\omega_n + i\omega}, \quad (9)$$

где $\tilde{g} = \tilde{G} \sum_{n=1}^3 g_n$, $\tilde{g}_n = \frac{\tilde{G}}{\tilde{g}} g_n$, $\sum_{n=1}^3 \tilde{g}_n = 1$,

$$\tilde{G} = \frac{G}{e_s(\omega)} \frac{1 - \xi_s^2}{(1 + \xi_s^2)^2}.$$

Разложения (8) и (9) позволяют использовать экономичный способ вычисления сверток, рассмотренный в 6 параграфе, при численном решении сейсмоакустических задач во временном представлении

2. Модифицированные уравнения Био для вязкоупругой пористой среды в частотном представлении

Модифицированные уравнения Био в декартовых координатах x^i ($i=1, 2, 3$) и частотном представлении, которое, как и выше, обозначается знаком «^», имеют вид:

$$i\omega \rho \hat{u}^i + i\omega \rho_f \hat{v}^i - \partial_j \hat{\sigma}^{ij} = 0, \quad (10)$$

$$i\omega \rho_f \hat{u}^i + i\omega \tilde{\rho} \hat{v}^i + \hat{F}_{fr}^i + \partial_i \hat{P} = 0, \quad (11)$$

$$i\omega \rho_f \hat{u}^i + i\omega \hat{\rho}^* \hat{v}^i + \partial_i \hat{P} = 0, \quad (11')$$

$$i\omega \hat{P} = -\hat{M} \partial_j \hat{v}^j - \widehat{aM} \partial_j \hat{u}^j, \quad (12)$$

$$i\omega \hat{\sigma}^{ij} = (\widehat{aM} \partial_j \hat{v}^j + (\hat{B} - 2\hat{G} + \widehat{a^2M}) \partial_j \hat{u}^j) \delta^{ij} + \hat{G} (\partial_j \hat{u}^i + \partial_i \hat{u}^j). \quad (13)$$

Уравнения (10) и (11) являются уравнениями движения, уравнения (12) и (13) – уравнениями состояния. δ^{ij} – символ Кронекера; \hat{u}^i , $\hat{v}^i = \phi(\hat{w}^i - \hat{u}^i)$ и \hat{w}^i – i -компоненты скорости смещения точек матрицы, фильтрационной скорости порового флюида и скорости смещения точек порового флюида соответственно; \hat{P} – давление в порах; $\hat{\sigma}^{ij}$ – ij -компонента полного тензора напряжений; ϕ – пористость формации; $\rho = \rho_s(1 - \phi) + \rho_f \phi$, ρ_s и ρ_f – плотности формации, материала матрицы и флюида соответственно; $\tilde{\rho} = \rho_f \alpha_\infty / \phi$, где α_∞ – значение динамической извилистости на бесконечной частоте [17];

$$\hat{F}_{fr}^i = \frac{\eta}{\kappa_0} \hat{v}^i \sqrt{1 + \frac{M_b}{2\omega_b} i\omega} - \quad (14)$$

i -компонента плотности силы трения между матрицей и флюидом, где $\omega_b = 2\pi f_b = \phi\eta / \alpha_\infty \rho_f \kappa_0$ – частота Био, κ_0 – значение проницаемости матрицы на нулевой частоте [17], η – вязкость порового

флюида, $M_b \in [1, 2]$ – параметр, связанный с отношением поверхности пор к объему пор и принимающий значение ≈ 1 для реальных сред [18]. Используя (14), уравнение (11) можно записать в виде (11'), в котором

$$\hat{\rho}^* = \frac{\rho_f}{\phi} \alpha_\infty \left(1 + \frac{\omega_b}{i\omega} \sqrt{1 + \frac{M_b}{2\omega_b} i\omega} \right). \quad (15)$$

Уравнения (10)-(13) отличаются от исходных уравнений Био включением в них результатов динамической теории проницаемости [17] и в настоящей работе частотно-зависимых модулей \widehat{aM} , $\widehat{a^2M}$, \hat{B} и \hat{G} в уравнения (12) и (13), способ определения которых дается ниже.

Главным следствием из исходной модели Био является существование трех типов волн: в обычном смысле продольной L и поперечной S волн, а также медленной волны или волны Био, связанной с относительным колебанием матрицы и флюида, описываемым фильтрационной скоростью порового флюида \hat{v}^j [10]. На частотах $\omega < \omega_b$ волна Био является в большей степени волной диффузионного типа, а на частотах $\omega > \omega_b$ – продольной волной, распространяющейся со скоростью, значительно меньшей скорости L волны. Скорости и затухания всех трех волн зависят от частоты, причем частотная дисперсия скоростей L и S волн незначительная.

В модели Био скорость поперечной волны определяется из выражения

$$\hat{V}_s(\omega) = \sqrt{G / (\rho - \rho_f / \hat{\rho}^*)}, \quad (16)$$

где G – модуль сдвига [19]. Его можно записать в виде $G = \chi_\mu \mu$, если использовать модуль сдвига материала матрицы μ и коэффициент сдвиговой сцементированности $\chi_\mu \in (0, 1)$. Если экспериментальные значения $\hat{V}_s(\omega)$ отличны от расчетных по модели Био, то это можно проинтерпретировать двумя независимыми образами. Первый подразумевает наличие вязкоупругих свойств только у коэффициента сдвиговой сцементированности $\hat{\chi}_\mu$, второй – в сдвиговом модуле $\hat{\mu}$. Так как представляется, что вязкоупругие свойства среды больше связаны с тем, как сцементирована матрица, то первый случай более предпочтителен. В этом случае, полагая в уравнении (16) $G = \hat{G}$, а входящие в выражение для $\hat{\rho}^*$ (15) остальные параметры формации известными, например, из лабораторных исследований, можно получить для модуля \hat{G} представление (9), которое далее будем использовать в модифицированных уравнениях Био.

Для скорости продольной волны имеет место более сложное выражение [19]:

$$(\hat{V}_L(\omega))^2 = Q + \sqrt{Q^2 - R}, \quad (17)$$

где

$$R = \frac{M}{\hat{\rho}^*} \cdot \frac{B}{\rho - \rho_f^2 / \hat{\rho}^*},$$

$$Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\rho - \rho_f^2 / \hat{\rho}^*} \left(B + M \left(\frac{\rho - 2a\rho_f}{\hat{\rho}^*} + a^2 \right) \right), \quad (18)$$

$$B = \lambda + 2G = K + \frac{4}{3}G = (1-a)k_s + \frac{4}{3}\chi_\mu k_\mu,$$

$$M = \left(\frac{\phi}{k_f} + \frac{a-\phi}{k_s} \right)^{-1}, \quad a-\phi \geq 0, \quad (19)$$

k_s, k_f – модули объемного сжатия материала матрицы и порового флюида, $K = \chi k_s$ – модуль объемного сжатия ненасыщенной флюидом или «сухой» матрицы, $\chi = (1-a) \in (0,1)$ – коэффициент объемной цементированности.

По аналогии с поперечной волной, если экспериментальные значения $\hat{V}_L(\omega)$ отличны от расчетных, и предполагая, что вязкоупругие свойства «сухой» матрицы больше связаны с коэффициентом χ , из уравнения (17) можно получить, что вязкоупругий коэффициент \hat{a} определяется из следующего выражения (20), причем

$$\hat{a}(\omega) = \frac{\hat{V}_L(\omega)^2 \left(\phi \left(\frac{1}{k_f} - \frac{1}{k_s} \right) \left(\left(k_s + \frac{4}{3}G \right) \hat{\rho}^* - \hat{V}_L(\omega)^2 (\hat{\rho}^* \rho - \rho_f^2) \right) + \rho \right) - \left(k_s + \frac{4}{3}G \right)}{\hat{V}_L(\omega)^2 \left(\frac{1}{k_s} \left(\hat{V}_L(\omega)^2 (\hat{\rho}^* \rho - \rho_f^2) - \left(k_s + \frac{4}{3}G \right) \hat{\rho}^* \right) + \phi k_s \left(\frac{1}{k_f} - \frac{1}{k_s} \right) \hat{\rho}^* + 2\rho_f \right) - k_s}, \quad (20)$$

Уравнения, описывающие распространение акустических возмущений в вязкоупругой непористой среде, можно получить как частный случай модифицированной системы уравнений Био (10)-(13), полагая $\phi=0$ и, как следствие, $\hat{a}=0$, $\widehat{aM} = \widehat{a^2M} = 0$ и $\hat{v}^i = 0$. Они имеют вид:

$$i\omega \rho \hat{u}^i - \partial_j \hat{\sigma}^{ij} = 0, \quad (21)$$

$$i\omega \hat{\sigma}^{ij} = (\hat{B} - 2\hat{G}) \partial_j \hat{u}^i \delta^{ij} + \hat{G} (\partial_j \hat{u}^i + \partial_i \hat{u}^j). \quad (22)$$

Эти же уравнения можно получить из исходной системы Био, полагая $\phi=0$, $B = \hat{B}$ и $G = \hat{G}$.

Уравнения, описывающие распространение акустических возмущений в вязкой сжимаемой жидкости, имеют ту же самую форму, что (21) и (22), если положить в них $\rho = \rho_f$,

$\text{Re}(\hat{a}) \in (0,1)$ и $\text{Im}(\hat{a}) < 0$. В уравнении (20) следовало бы положить $G = \hat{G}$, однако численные расчеты показали, что такая замена обычно не вносит большого вклада в \hat{a} .

Далее, используя рациональное представление (7), несложно найти представления в виде (8) для вязкоупругих модулей \hat{M} и \hat{B} , произведений $\hat{a}\hat{M}$ и $\hat{a}^2\hat{M}$, частотные представления которых обозначим, как \widehat{aM} и $\widehat{a^2M}$ соответственно.

Будем предполагать, что для описания рассмотренных модулей достаточно трех частот.

Как видно, введение вязкоупругих свойств в модель Био – нетривиальная задача. Первая попытка была предпринята Био [10] с использованием модели Максвелла [4]. Однако реальные среды лучше описывает модель стандартного линейного тела [3, 4], которая также включает в себя модель Максвелла. Далее были предприняты попытки, например, в [6], формального введения только частотной зависимости в модуль M , который отражает механизм объемного взаимодействия матрицы и флюида. В [7] аналогичные формальные зависимости были введены дополнительно для модулей K и G . Из этих работ неясно, каким образом экспериментально можно оценить эти вязкоупругие параметры. С нашей точки зрения, предложенный выше подход является более осмысленным.

$\hat{B} = k_f + (4/3)\hat{G}$, $\hat{G} = i\omega\eta$, где k_f – объемный модуль жидкости, η – вязкость жидкости. Чтобы использовать экономичный способ вычисления сверток, предлагается заменить модуль \hat{G} на приближенное выражение

$$\hat{G} \approx \frac{i\omega\eta}{1 + i\omega/\omega_*} = \eta\omega_* - \frac{\eta\omega_*^2}{\omega_* + i\omega}, \quad (23)$$

где ω_* много больше верхней граничной частоты источника. Тогда для модуля \hat{B} получаем:

$$\hat{B} \approx k_f + \frac{4}{3}\eta\omega_* - \frac{4}{3} \frac{\eta\omega_*^2}{\omega_* + i\omega}. \quad (24)$$

Обоснованность такого подхода подтверждена с помощью кода из [20].

3. Модифицированные уравнения Био для вязкоупругой пористой среды во временном представлении и способ их решения

В цилиндрических координатах (r, φ, z) обозначим через $\mathbf{u} = (u^r, u^\varphi, u^z)^T$ вектор скорости смещения точек матрицы, через $\mathbf{v} = (v^r, v^\varphi, v^z)^T$ – вектор фильтрационной скорости порового флюида и через $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^{rr}, \sigma^{\varphi\varphi}, \sigma^{zz}, \sigma^{r\varphi}, \sigma^{z\varphi}, \sigma^{rz})^T$ – тензор полного напряжения.

Тогда уравнения движения (10) и (11) во временном представлении будут иметь вид

$$\begin{aligned} &\rho \partial_t \mathbf{u} + \rho_f \partial_t \mathbf{v} = \\ &= \left(\partial_r \sigma^{rr} + \frac{1}{r} (\partial_\varphi \sigma^{r\varphi} + \sigma^{rr} - \sigma^{\varphi\varphi}) + \partial_z \sigma^{rz}, \right. \\ &\quad \partial_r \sigma^{r\varphi} + \frac{1}{r} (\partial_\varphi \sigma^{\varphi\varphi} + 2\sigma^{r\varphi}) + \partial_z \sigma^{z\varphi}, \\ &\quad \left. \partial_r \sigma^{rz} + \frac{1}{r} (\partial_\varphi \sigma^{z\varphi} + 2\sigma^{rz}) + \partial_z \sigma^{zz} \right)^T, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\rho_f \partial_t \mathbf{u} + \tilde{\rho}_f \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{F}_{fr} = -\nabla P = - \left(\partial_r P, \frac{1}{r} \partial_\varphi P, \partial_z P \right)^T, \quad (26)$$

где сила трения между матрицей и флюидом

$$\mathbf{F}_{fr} = \frac{\eta}{\kappa_0} \int_0^t \frac{\exp\left(-\frac{2\omega_b}{M_b}(t-\tau)\right)}{\sqrt{\pi \frac{2\omega_b}{M_b}(t-\tau)}} \left(\partial_\tau \mathbf{v} + \frac{2\omega_b}{M_b} \mathbf{v} \right) d\tau. \quad (27)$$

Используя уравнение (14), можно показать, что, когда верхняя частота источника не превосходит частоту Био ω_b , вместо выражения (27) можно использовать более простое:

$$\mathbf{F}_{fr} = \frac{\eta}{\kappa_0} \mathbf{v} + \frac{a_\infty \rho_f M_b}{\phi 4} \partial_t \mathbf{v}. \quad (27')$$

Уравнения состояния (12) и (13) примут вид

$$\partial_t P = -\bar{M} * \Delta \cdot \mathbf{v} - a\bar{M} * \Delta \cdot \mathbf{u}, \quad (28)$$

$$\partial_t \boldsymbol{\sigma} = (a\bar{M} * \Delta \cdot \mathbf{v} + \bar{D} * \Delta \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + \bar{G} * \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (29)$$

где \mathbf{I} – единичный тензор второго ранга,

$$\Delta \cdot \mathbf{u} = \partial_r u^r + \frac{1}{r} (\partial_\varphi u^\varphi + u^r) + \partial_z u^z, \quad (30)$$

$$\Delta \cdot \mathbf{v} = \partial_r v^r + \frac{1}{r} (\partial_\varphi v^\varphi + v^r) + \partial_z v^z,$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} = & \left(2\partial_r u^r, 2\frac{1}{r} (\partial_\varphi u^\varphi + u^r), 2\partial_z u^z, \right. \\ & \frac{1}{r} \partial_\varphi u^r - \frac{u^r}{r} + \partial_r u^\varphi, \\ & \left. \frac{1}{r} \partial_\varphi u^z + \partial_z u^\varphi, \partial_z u^r + \partial_r u^z \right)^T. \end{aligned} \quad (31)$$

Коэффициенты \bar{M} , $a\bar{M}$, $\bar{D} = \bar{B} - 2\bar{G} + a^2\bar{M}$ и \bar{G} в силу их частотного представления вида (8) после применения обратного преобразования Лапласа будут следующими:

$$\bar{M} = (\tilde{M} + \tilde{m}) \delta_+(t) - \tilde{m} \sum_{m=1}^3 \tilde{m}_m \omega_m \exp(-\omega_m t), \quad (32)$$

$$\begin{aligned} a\bar{M} = & (a\tilde{M} + a\tilde{m}) \delta_+(t) - \\ & - a\tilde{m} \sum_{n=1}^3 a\tilde{m}_n \omega_n \exp(-\omega_n t), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\bar{G} = (\tilde{G} + \tilde{g}) \delta_+(t) - \tilde{g} \sum_{n=1}^3 g_n \omega_n \exp(-\omega_n t), \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \bar{D} = & (\bar{B} - 2\bar{G} + a^2\bar{M}) = (\tilde{D} + \tilde{d}) \delta_+(t) - \\ & - \tilde{d} \sum_{n=1}^3 d_n \omega_n \exp(-\omega_n t). \end{aligned} \quad (35)$$

При моделировании система уравнений (25), (26), (28), (29) дополнялась нулевыми начальными условиями:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(r, \varphi, z, 0) = \mathbf{v}(r, \varphi, z, 0) = 0, \\ P(r, \varphi, z, 0) = \boldsymbol{\sigma}(r, \varphi, z, 0) = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Для решения задачи применялось разложение решения по азимутальному углу φ в комплексном виде. Например,

$$\begin{aligned} u^r(r, z, \varphi, t) = \sum_{\ell=-2}^2 \exp(i\ell\varphi) u_\ell^r(r, z, t), \\ P(r, z, \varphi, t) = \sum_{\ell=-2}^2 \exp(i\ell\varphi) P_\ell(r, z, t). \end{aligned} \quad (37)$$

Это позволило численно моделировать разнообразные источники в жидкости (монополь, диполь, квадруполь и т.п.) и в упругой среде (концентрированная сила, диполь, центр расширения) [5, 13] заданием в общем случае на поверхности некоторого цилиндра, окружающего источник, его скоростей смещений и напряжений σ^z . Такое разложение помогло также упростить реализацию схемы, но потребовало больше компьютерной памяти.

4. Условия на границах различных сред и на внешней границе

Рассмотренные в предыдущем параграфе уравнения включают описание следующих сред: жидкость, вязкая жидкость, упругая среда, вязкоупругая среда, среда Био и вязкоупругая среда Био. Условия на границе разрыва сред, следующих одна за другой в направлении r и z , приведены в таблицах 1 и 2 соответственно. Заметим, что условия для вязкоупругой среды будут такими же, что и для упругой среды, аналогично – для вязкоупругой среды Био.

В первых двух колонках таблиц не существует разницы между вязкой жидкостью и упругой средой, так как уравнения для сжимаемой вязкой жидкости имеют ту же самую форму, что и для упругой среды. В третьей колонке таблиц четвертое условие основано на эластичной мембранной модели глинистой корки [21]. Ее как бы

Таблица 1

Условия на границе разрыва в направлении *r*
Conditions at the boundary of discontinuity in r-direction

Жидкость – вязкая жидкость или упругая среда	Вязкая жидкость или упругая среда – вязкая жидкость или упругая среда	Вязкая жидкость – среда Био	Упругая среда – среда Био	Среда Био – среда Био
$u^r = u^r$ $-P = \sigma^{rr}$ $0 = \sigma^{rz}$ $0 = \sigma^{r\varphi}$	$u^r = u^r$ $u^z = u^z$ $\sigma^{rr} = \sigma^{rr}$ $\sigma^{rz} = \sigma^{rz}$ $\sigma^{r\varphi} = \sigma^{r\varphi}$	$u^r = u^r + v^r$ $u^z = u^z$ $\sigma^{rr} = \sigma^{rr}$ $\partial_i \sigma^{rr} = -(\partial_i P + \Lambda^{mc} v^r)$ $\sigma^{rz} = \sigma^{rz}$ $\sigma^{r\varphi} = \sigma^{r\varphi}$	$u^r = u^r + v^r$ $u^z = u^z$ $\sigma^{rr} = \sigma^{rr}$ $\sigma^{rr} = -P$ $\sigma^{rz} = \sigma^{rz}$ $\sigma^{r\varphi} = \sigma^{r\varphi}$	$u^r = u^r + v^r$ $u^z = u^z$ $u^z = u^z$ $\sigma^{rr} = \sigma^{rr}$ $\sigma^{rz} = \sigma^{rz}$ $\sigma^{r\varphi} = \sigma^{r\varphi}$ $P = P$

Таблица 2

Условия на границе разрыва в направлении *z*
Conditions at the boundary of discontinuity in z-direction

Жидкость – вязкая жидкость или упругая среда	Вязкая жидкость или упругая среда – вязкая жидкость или упругая среда	Вязкая жидкость – среда Био	Упругая среда – среда Био	Среда Био – среда Био
$u^z = u^z$ $-P = \sigma^{zz}$ $0 = \sigma^{rz}$ $0 = \sigma^{z\varphi}$	$u^z = u^z$ $u^r = u^r$ $\sigma^{zz} = \sigma^{zz}$ $\sigma^{rz} = \sigma^{rz}$ $\sigma^{z\varphi} = \sigma^{z\varphi}$	$u^z = u^z + v^z$ $u^r = u^r$ $\sigma^{zz} = \sigma^{zz}$ $\partial_i \sigma^{zz} = -(\partial_i P + \Lambda^{mc} v^z)$ $\sigma^{rz} = \sigma^{rz}$ $\sigma^{z\varphi} = \sigma^{z\varphi}$	$u^z = u^z + v^z$ $u^r = u^r$ $\sigma^{zz} = \sigma^{zz}$ $\sigma^{zz} = -P$ $\sigma^{rz} = \sigma^{rz}$ $\sigma^{z\varphi} = \sigma^{z\varphi}$	$u^z + v^z = u^z + v^z$ $u^z = u^z$ $u^r = u^r$ $\sigma^{zz} = \sigma^{zz}$ $\sigma^{rz} = \sigma^{rz}$ $\sigma^{z\varphi} = \sigma^{z\varphi}$ $P = P$

выгибание характеризуется параметром Λ^{mc} . Случай $\Lambda^{mc}=0$ соответствует открытым порам на стенке скважины, когда глинистая корка отсутствует, случай $\Lambda^{mc}=\infty$ – запечатанным порам, когда глинистая корка «не выгибается». Если вязкую жидкость и среду Био поменять местами, то глинистая корка будет «выгибаться» в другую сторону, поэтому это условие запишется в виде $-(\partial_i P - \Lambda^{mc} v^r) = \partial_i \sigma^{rr}$ и $-(\partial_i P - \Lambda^{mc} v^z) = \partial_i \sigma^{zz}$ соответственно.

Условия на границе разрыва между жидкостью и средой Био можно получить из условий вязкая жидкость – среда Био, если в них положить $0 = \sigma^{rz}$, $0 = \sigma^{r\varphi}$ и $0 = \sigma^{z\varphi}$.

В качестве краевых условий прозрачности на границе расчетной области использовался нерасщепляющийся полностью согласованный слой, или NPML (Nonsplitting Perfectly Matched Layer) [5, 22].

Он вводится следующим образом [22]. Пусть $r = r_*$ и $z = z_*$ – внутренние границы согласованного слоя в направлениях *r* и *z* соответственно. В дифференциальных операторах уравнений Био (25), (26), (28), (29) в частотном представлении проведем замену

$$r \rightarrow \tilde{r} = \int_0^r (1 + \omega_r(x) / i\omega) dx$$

и

$$z \rightarrow \tilde{z} = \int_0^z (1 + \omega_z(x) / i\omega) dx,$$

тогда для некоторой величины $\hat{A}(r, \varphi, z, \omega)$ получим

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial \tilde{r}} = \left(1 + \frac{\omega_r(r)}{i\omega}\right)^{-1} \frac{\partial \hat{A}}{\partial r} = \left(1 - \frac{\omega_r(r)}{\omega_r(r) + i\omega}\right) \frac{\partial \hat{A}}{\partial r}, \quad (38)$$

$$\frac{1}{\tilde{r}} \hat{A} = \left(1 + \frac{\Omega_r(r)}{i\omega}\right)^{-1} \frac{\hat{A}}{r} = \frac{\hat{A}}{r} \left(1 - \frac{\Omega_r(r)}{\Omega_r(r) + i\omega}\right), \quad (39)$$

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial \tilde{z}} = \left(1 + \frac{\omega_z(z)}{i\omega}\right)^{-1} \frac{\partial \hat{A}}{\partial z} = \left(1 - \frac{\omega_z(z)}{\omega_z(z) + i\omega}\right) \frac{\partial \hat{A}}{\partial z}, \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_r(r) &= \theta(r - r_*) \alpha^r (r - r_*)^2, \\ \Omega_r(r) &= \theta(r - r_*) \frac{\alpha^r}{3r} (r - r_*)^3, \\ \omega_z(z) &= \theta(z - z_*) \alpha^z (z - z_*)^2. \end{aligned} \quad (41)$$

$\theta(x)$ – функция Хевисайда, $\alpha^r = 8 \cdot 2\pi f_{\text{peak}} / L_r^2$, $\alpha^z = 8 \cdot 2\pi f_{\text{peak}} / L_z^2$.

Отметим, что $\Omega_r(r) = (1/r) \int_0^r \omega_r(x) dx$. Параметры L_r и L_z задают толщину слоя в направлениях r и z соответственно. Толщину оптимально задавать в длинах волны, распространяющейся на пиковой частоте излучателя около границы $r = r_*$ или $z = z_*$.

Такая замена обеспечивает затухание плоской волны, распространяющейся в направлении r со скоростью $V(\omega)$, в виде $\exp(-\int_0^r \omega_r(x)/V(\omega) dx)$.

Аналогичное имеет место в направлении z .

Введем далее следующие обозначения:

$$\begin{aligned} I^r &= \omega_r(r) \exp(-\omega_r(r) t), \\ I^R &= \Omega_r(r) \exp(-\Omega_r(r) t), \\ I^z &= \omega_z(z) \exp(-\omega_z(z) t). \end{aligned} \quad (42)$$

Тогда во временном представлении выражения (38)–(40) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \tilde{r}} &= \frac{\partial A}{\partial r} - \omega_r(r) \int_0^t \exp(-\omega_r(r)(t-\tau)) \frac{\partial A(r, \varphi, z, \tau)}{\partial r} d\tau = \\ &= \frac{\partial A}{\partial r} - I^r * \frac{\partial A(r, \varphi, z, t)}{\partial r}, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{r}} A &= \frac{1}{r} \left(A - \Omega_r(r) \int_0^t \exp(-\Omega_r(r)(t-\tau)) A(r, \varphi, z, \tau) d\tau \right) = \\ &= \frac{1}{r} \left(A - I^R * A(r, \varphi, z, t) \right), \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \tilde{z}} &= \frac{\partial A}{\partial z} - \omega_z(z) \int_0^t \exp(-\omega_z(z)(t-\tau)) \frac{\partial A(r, \varphi, z, \tau)}{\partial z} d\tau = \\ &= \frac{\partial A}{\partial z} - I^z * \frac{\partial A(r, \varphi, z, t)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (45)$$

Откуда можно получить уравнения движения (25) и (26) с учетом NPML. Они будут иметь длинные записи, поэтому ограничимся приведением этих уравнений в r -направлении:

$$\rho_f \partial_t u^r + \rho_f \partial_t v^r = \partial_r \sigma^{rr} + \frac{1}{r} (\partial_\varphi \sigma^{r\varphi} + \sigma^{rr} - \sigma^{\varphi\varphi}) + \partial_z \sigma^{rz} - \quad (46)$$

$$-I^r * \partial_r \sigma^{rr} - I^R * \frac{1}{r} (\partial_\varphi \sigma^{r\varphi} + \sigma^{rr} - \sigma^{\varphi\varphi}) - I^z * \partial_z \sigma^{rz},$$

$$\rho_f \partial_t u^r + \tilde{\rho}_f \partial_t v^r + F_{fr}^r = -\partial_r P + I^r * \partial_r P. \quad (47)$$

Уравнения состояния (28), (29) с учетом NPML становятся громоздкими, поэтому для краткости ограничимся рассмотрением уравнения (28).

Если величину $\hat{A}(r, \varphi, z, \omega)$ можно представить в виде разложения вида (8), то, учитывая выражения (38)–(40), получим

$$\begin{aligned} \tilde{A} \left(1 - \frac{\omega_*}{\omega_* + i\omega} \right) &= (\tilde{A} + \tilde{a}) \left(1 - \frac{\omega_*}{\omega_* + i\omega} \right) - \\ - \tilde{a} \sum_{n=1}^3 \frac{\tilde{a}_n \omega_n}{\omega_n + i\omega} \frac{i\omega}{\omega_* + i\omega}, \quad \omega_* &= \omega_r, \Omega_r \text{ или } \omega_z. \end{aligned} \quad (48)$$

Применяя обратное преобразование Лапласа к уравнению (48), заключим

$$\begin{aligned} \bar{A} &= (\tilde{A} + \tilde{a}) (\delta_+(t) - \omega_* \exp(-\omega_* t)) - \\ - \tilde{a} \sum_{n=1}^3 \frac{a_n \omega_n}{\omega_* - \omega_n} (\omega_* \exp(-\omega_* t) - \omega_n \exp(-\omega_n t)). \end{aligned} \quad (49)$$

Отсюда уравнение состояния (28) с учетом NPML примет вид

$$\begin{aligned} \partial_t P &= -(\tilde{M} + \tilde{m}) \left(\Delta \cdot \mathbf{v} - I^r * \partial_r v^r - I^\Omega * \frac{1}{r} (\partial_\varphi v^\varphi + v^r) - I^z * \partial_z v^z \right) + \\ + \tilde{m} \sum_{n=1}^3 \left(\frac{\tilde{m}_n \omega_n}{\omega_r - \omega_n} (I^r * \partial_r v^r - I^{\omega n} * \partial_r v^r) + \right. \\ + \frac{\tilde{m}_n \omega_n}{\Omega_r - \omega_n} \left(I^R * \frac{1}{r} (\partial_\varphi v^\varphi + v^r) - I^{\omega n} * \frac{1}{r} (\partial_\varphi v^\varphi + v^r) \right) + \\ + \left. \frac{\tilde{m}_n \omega_n}{\omega_z - \omega_n} (I^z * \partial_z v^z - I^{\omega n} * \partial_z v^z) \right) - \\ - (\tilde{aM} + \tilde{am}) \left(\Delta \cdot \mathbf{u} - I^r * \partial_r u^r - I^\Omega * \frac{1}{r} (\partial_\varphi u^\varphi + u^r) - I^z * \partial_z u^z \right) + \\ + \tilde{am} \sum_{n=1}^3 \left(\frac{\tilde{am}_n \omega_n}{\omega_r - \omega_n} (I^r * \partial_r u^r - I^{\omega n} * \partial_r u^r) + \right. \\ + \frac{\tilde{am}_n \omega_n}{\Omega_r - \omega_n} \left(I^R * \frac{1}{r} (\partial_\varphi u^\varphi + u^r) - I^{\omega n} * \frac{1}{r} (\partial_\varphi u^\varphi + u^r) \right) + \\ + \left. \frac{\tilde{am}_n \omega_n}{\omega_z - \omega_n} (I^z * \partial_z u^z - I^{\omega n} * \partial_z u^z) \right), \end{aligned} \quad (50)$$

где $I^{\omega n} = \omega_n \exp(-\omega_n t)$, $n = 1, 2, 3$.

Условия NPML являются неотражающими, и их несложно реализовать численно. Они хорошо работают в однородной среде, причем r_* и z_* можно даже полагать равными длине волны, однако в общем случае они могут оказаться неустойчивыми, например при наличии трещины. В этой связи могут применяться устойчивые условия отсутствия волн из бесконечности для компактного излучателя в однородной среде [24, 25].

5. Описание конечно-разностного кода и условие Куранта

Во временной области $t \in [0, T]$ введем равномерную сетку:

$$t_n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad t_N = T;$$

$$t_{n+1/2} = (t_n + t_{n+1})/2, \quad n = 0, \dots, N-1, \quad t_{-1/2} = t_0 = 0.$$

Разностные аналоги на временной сетке компонент скоростей смещения \mathbf{u} и \mathbf{v} определим в целых точках, а компонент тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и давления P – в полуцелых точках.

В пространственной области $\{r \in [0, r_{\max}], z \in [z_{\min}, z_{\max}]\}$ введем сдвинутую неравномерную сетку:

$$\begin{aligned}
 r_{m+1} &= r_m + \Delta r_m, \quad m=1, \dots, M-1, \quad r_1=0, \quad r_M = r_{\max}, \quad \Delta r_0 = \Delta r_M = 0; \\
 r_{m+1/2} &= (r_m + r_{m+1})/2, \quad m=1, \dots, M-1, \quad r_{1/2} = r_1, \quad r_{M+1/2} = r_M; \\
 \hat{r}_m &= (r_{m-1/2} + r_{m+1/2})/2, \quad m=1, \dots, M-1; \\
 h_m &= r_{m+1/2} - r_{m-1/2}, \quad m=1, \dots, M, \quad h_1 = \Delta r_1/2, \quad h_M = \Delta r_{M-1}/2; \\
 z_{k+1} &= z_k + \Delta z_k, \quad k=1, \dots, K-1, \quad z_1 = z_{\min}, \quad z_K = z_{\max}, \quad \Delta z_0 = \Delta z_K = 0; \\
 z_{k+1/2} &= (z_k + z_{k+1})/2, \quad k=1, \dots, K-1, \quad z_{1/2} = z_1, \quad z_{K+1/2} = z_K; \\
 \hat{z}_k &= (z_{k-1/2} + z_{k+1/2})/2, \quad k=1, \dots, K-1; \\
 \hat{h}_k &= z_{k+1/2} - z_{k-1/2}, \quad k=1, \dots, K, \quad \hat{h}_1 = \Delta z_1/2, \quad \hat{h}_K = \Delta z_{K-1}/2.
 \end{aligned}$$

Разностные аналоги на пространственной сетке неизвестных компонент определим в соответствии с рис. 1. Линии разрывов параметров среды будем проводить параллельно координат-

ным осям в целочисленных узлах. Параметры среды или коэффициенты уравнений будем задавать в полужелтых пространственных точках.

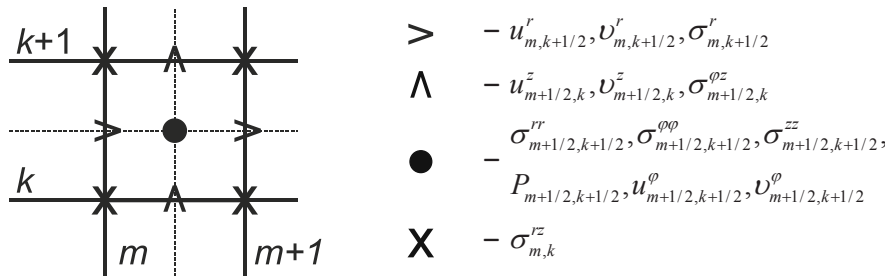


Рис. 1. Пространственная сеточная привязка неизвестных

Fig. 1. Binding of unknowns to spatial grid

Таким образом, компонента σ^z непрерывна по r и z и задается в целочисленных узлах. Неизвестные u^r, v^r, σ^r задаются в целых узлах по r и полужелтых узлах по z , неизвестные u^z, v^z, σ^z – в полужелтых узлах по r и целых узлах по z . Остальные компоненты задаются в полужелтых узлах по r и z . Заметим, что сеточные функции не задаются внутри области, занятой источником, некоторые из них задаются на границе источника, как описано в [5].

Численное решение поставленной задачи основано на использовании явной конечно-разностной

схемы на сдвинутых сетках с переменным шагом [24], подробное описание которой дано в работе [12]. В силу линейности поставленной задачи её численная реализация поддается распараллеливанию, однако оптимальный способ распараллеливания схемы зависит от типа аппаратуры и вида операционной системы.

В связи с использованием разложения решения по азимутальному углу φ было построено оригинальное условие Куранта на неравномерной сетке, обеспечивающее устойчивость разностной схемы при гармониках, отличных от нулевой:

$$\tau \leq \tau_* = \min_{\substack{m=1, \dots, M-1 \\ k=1, \dots, K-1}} \left(\frac{\Delta r_m \Delta z_k}{V_{m+1/2, k+1/2} \sqrt{(\Delta r_m)^2 + (\Delta z_k)^2 + (\Delta r_m \Delta z_k \cdot l / (2r_{m+1/2}))^2}} \right), \tag{51}$$

где $V_{m+1/2, k+1/2}$ – максимальное значение скорости продольной волны в узле в изучаемом диапазоне частот. Это условие является более общим по сравнению с условием Куранта на равномерной сетке ($\Delta r_m = \Delta z_k = \Delta$), приведенным ранее в [26] и следующим из (51).

6. О вычислении свертков с экспоненциальным ядром

Вид выражений (8) и (9) обуславливает вычисление в вязкоупругой модели Био во временном представлении свертков с экспоненциальными

ядрами (32)–(35), которые также используются для NPML (46), (47), (50). Вычисление проводится доказанным экономичным способом [14, 15].

Выведем выражение для вычисления свертков:

$$\begin{aligned}
 F^n &= \int_0^t \exp(-\omega(t_n - \tau)) f(\tau) d\tau = \\
 &= \int_0^{t_{n-1}} \exp(-\omega(t_n - \tau)) f(\tau) d\tau + \\
 &+ \int_{t_{n-1}}^t \exp(-\omega(t_n - \tau)) f(\tau) d\tau = \exp(-\omega \Delta t) F^{n-1} + \\
 &+ \int_{t_{n-1}}^t \exp(-\omega(t_n - \tau)) f(\tau) d\tau, \quad n=1, \dots, N, \quad F^0 = 0.
 \end{aligned} \tag{52}$$

Воспользуемся в подынтегральном выражении линейной интерполяцией по времени сеточной функции f в интервале $\tau \in [t_{n-1}, t_n]$:

$$f(\tau) = f^n - (f^n - f^{n-1})(t_n - \tau) / \Delta t. \quad (53)$$

Тогда получим рекуррентное соотношение:

$$F^n = \exp(-\omega \Delta t) F^{n-1} + \frac{1}{\omega} \left(1 - \frac{1 - \exp(-\omega \Delta t)}{\omega \Delta t} \right) f^n + \frac{1}{\omega} \left(\frac{1 - \exp(-\omega \Delta t)}{\omega \Delta t} - \exp(-\omega \Delta t) \right) f^{n-1}. \quad (54)$$

Выражение для $F^{n+1/2}$ будет аналогичным, так как $F^{1/2} = 0$.

Выражение (54) также можно применить для вычисления свертки вида

$$F = \int_0^{t_n} \frac{\exp(-2\beta(t_{n+1/2} - \tau))}{\sqrt{2\pi\beta(t_{n+1/2} - \tau)}} f(\tau) d\tau, \quad (55)$$

используемой в выражении для плотности силы трения между матрицей и флюидом (27). Для этого воспользуемся разложением вида

$$f(x) = 1/\sqrt{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-T_n x), \quad x \geq 0, \quad (56)$$

коэффициенты которого можно получить с помощью алгоритма матричных пучков [27]. Первые 14 коэффициентов этого разложения приведены в таблице 3. Тогда, так как $\tau \leq t_n$, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{t_{n+1/2} - \tau}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta t/2} \sqrt{1 + 2(t_n - \tau)/\Delta t}} \approx \sqrt{\frac{2}{\Delta t}} \sum_{n=1}^{14} A_n \exp\left(-\frac{2T_n}{\Delta t}(t_n - \tau)\right). \quad (57)$$

Откуда окончательно получаем:

$$F \approx \frac{\exp(-\beta \Delta t)}{\sqrt{\pi \beta \Delta t}} \sum_{i=1}^{14} A_n \cdot \int_0^{t_n} \exp(-2(\beta + T_n / \Delta t)(t_n - \tau)) f(\tau) d\tau. \quad (58)$$

7. Моделирование лабораторного эксперимента

В образце песчаной породы, насыщенной водой, просверлено круглое отверстие радиусом 1 см, в которое центрировано погружены точечные монополюсный источник (в начале координат) и датчик давления, который может передвигаться вдоль отверстия. Считается, что внешняя поверхность породы располагается далеко, и, соответственно, отраженные от нее волны не оказывают влияния на регистрируемое поле.

Эскиз моделируемой задачи изображен на рис. 2а, он во входном текстовом файле программы располагается первым. Основная расчетная область имеет размеры $\{r, z: [0, 0.1] \times [-0.1, 0.4]\}$, которые заданы в метрах. Шаг по r и z был выбран равномерным и равнялся 0,25 мм, в NPML, не входящем в основную область, использовалось 15 точек.

Точечный источник моделировался с помощью окружающего его цилиндра \$fluid высотой и диаметром в 1 см, используя при задании скоростей смещения точек его поверхности [5] импульс Берлаге (внутри цилиндра расчеты не проводятся):

$$f(t) = A(2\pi f_{peak} t)^2 \sin(2\pi f_{peak} t) \exp(-2\pi f_{peak} t / \sqrt{3}). \quad (59)$$

Таблица 3

Коэффициенты разложения $1/\sqrt{1+x}$ на сумму экспонент
The decomposition coefficients of function $1/\sqrt{1+x}$ for the sum of exponentials

m	A_n	T_n
1	$9,540853988228605 \cdot 10^{-3}$	4,581698614290183
2	$2,643808354434316 \cdot 10^{-2}$	2,548512146355390
3	$9,893857731350460 \cdot 10^{-2}$	1,600716848071002
4	$2,141865537517109 \cdot 10^{-1}$	$7,019150616142205 \cdot 10^{-1}$
5	$2,294809830604571 \cdot 10^{-1}$	$2,649314294615471 \cdot 10^{-1}$
6	$1,739649605050017 \cdot 10^{-1}$	$9,010047654713393 \cdot 10^{-2}$
7	$1,111593189180471 \cdot 10^{-1}$	$2,805928304793382 \cdot 10^{-2}$
8	$6,535548682266647 \cdot 10^{-2}$	$7,984611165067145 \cdot 10^{-3}$
9	$3,628827525969136 \cdot 10^{-2}$	$2,040785280166425 \cdot 10^{-3}$
10	$1,906613855432791 \cdot 10^{-2}$	$4,542637130459330 \cdot 10^{-4}$
11	$9,348150866819713 \cdot 10^{-3}$	$8,36919946813824 \cdot 10^{-5}$
12	$4,166561097454345 \cdot 10^{-3}$	$1,163822819125711 \cdot 10^{-5}$
13	$1,598581265910818 \cdot 10^{-3}$	$9,977782167834097 \cdot 10^{-7}$
14	$4,674750518357016 \cdot 10^{-4}$	$2,680497437744414 \cdot 10^{-8}$
Погрешность в непрерывной норме C не превышает $7,4 \cdot 10^{-5}$		

Полагалось $f_{\text{peak}} = 50$ кГц, а значение A такое, что на расстоянии в 1 м от источника в бассейне с водой создавалось давление в 1000 Па. Временная нормированная зависимость импульса и его амплитудный спектр показаны на рис. 3а. Достоинством импульса Берлаге является его резкий выход из нуля, что, соответственно, обуславливает его широкий спектр.

В упругой среде Био FBB, окружающей отверстие, значения скоростей продольной и поперечной волн на нулевой частоте полагались $V_L = 4000 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$ и $V_S = 2200 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$ соответственно. Остальные значения параметров были следующими: $k_S = 3,9 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $\mu = 4,5 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $\rho_S = 2650 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$, $\phi = 0,2$, $\kappa_0 = 0,1 \text{ Д}$ или $0,5 \text{ Д}$ ($1 \text{ Д} = 10^{-12} \text{ м}^2$), $\alpha_\infty = 3$, $k_f = 2,25 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $\rho_f = 1000 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$, $\eta = 0,001 \text{ Па}\cdot\text{с}$.

Несложно определить, что $\chi = 0,502$ и $\chi_\mu = 0,2495$. Для таких данных имеем $f_b = 106 \text{ кГц}$ ($\kappa_0 = 0,1 \text{ Д}$) и 21 кГц ($\kappa_0 = 0,5 \text{ Д}$).

Вязкоупругая среда Био FBB моделировалась введением в коэффициент сдвиговой сцементированности большого поглощения $Q_S = 5$ в диапазоне частот от $f_{\text{min}} = 10 \text{ кГц}$ до $f_{\text{max}} = 200 \text{ кГц}$. Аппроксимация Q_S -фактора рациональной функцией, используя три частоты f_{min} , $f = \sqrt{f_{\text{min}} f_{\text{max}}} = 44,7 \text{ кГц} \approx f_{\text{peak}}$ и f_{max} , показана на рис. 3б. Относительная погрешность не превосходит 6%.

Скважина заполнена тем же флюидом BS, что и поровая жидкость, но невязким, в нем скорость $V_{BS} = 1500 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$. Глинистая корка на стенке скважины задавалась параметром $a = 0$, т.е. поры были открытыми.

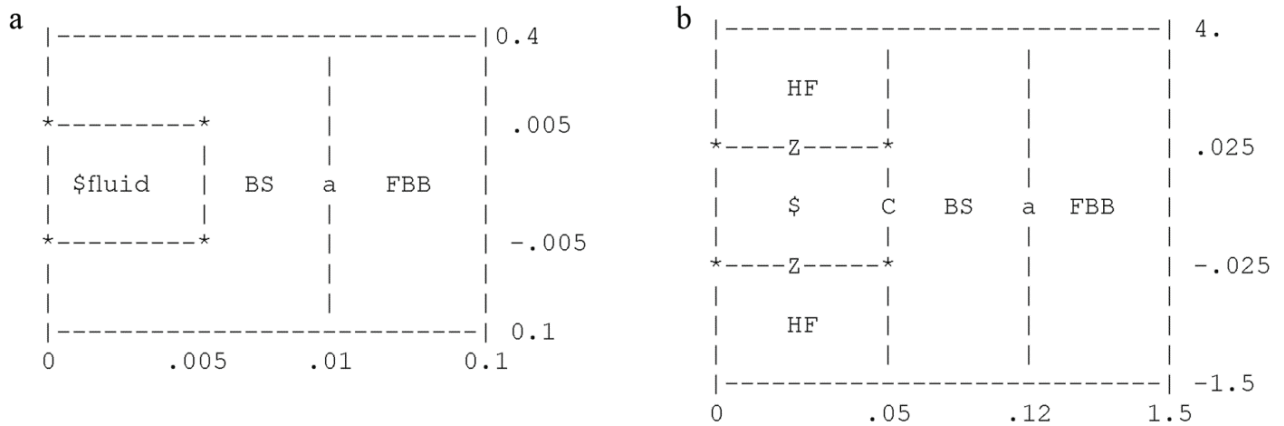


Рис. 2. Примеры эскизов, описывающих задачи лабораторного эксперимента (а) и акустического каротажа (б)

Fig. 2. Sketch examples describing the tasks of laboratory experiment (a) and acoustic logging (b)

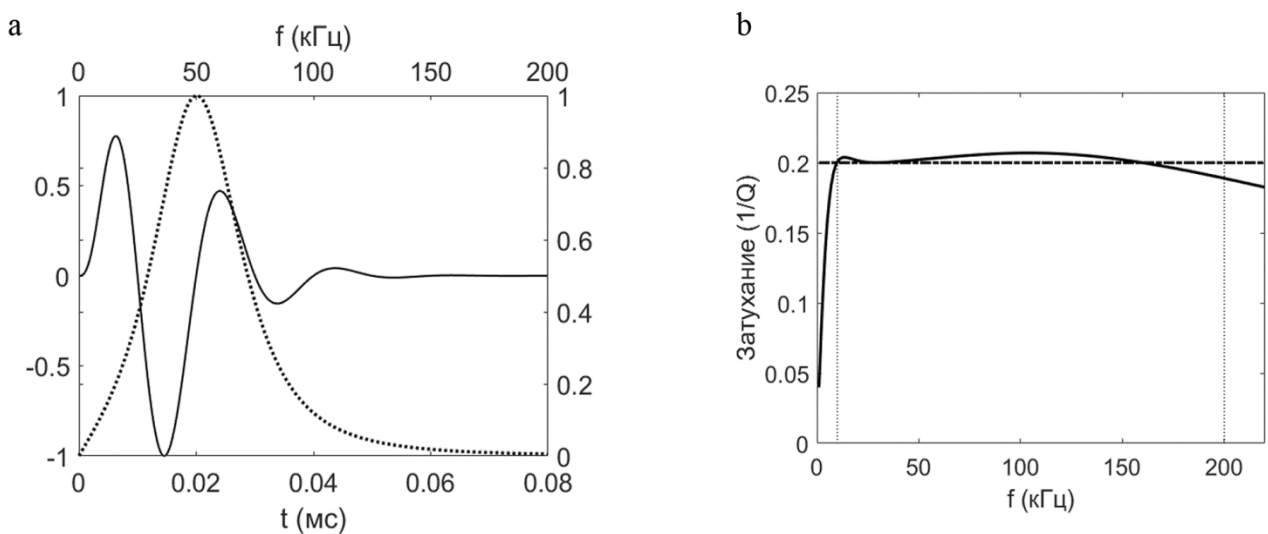


Рис. 3. Нормированный импульс Берлаге и его нормированный амплитудный спектр (а); пример аппроксимации Q -фактора, равного 5, по трем частотам (б)

Fig. 3. Beralge's normalized impulse and its normalized amplitude spectrum (a); an example of approximation of Q -factor equal to 5 by three frequencies (b)

На рис. 4 представлены результаты моделирования волновых картин для упругой и вязкоупругой сред Био в случае $\kappa_0 = 0,1$ Д. На волновых картинах в случае упругой среды видно наличие трех волн: головных продольной L и поперечной S волн, а также волны Стоунли (St) [28]. За поперечной головной волной следует псевдорелеевская волна (не обозначена), колебания которой на дальних приемниках можно наблюдать и после волны Стоунли. В случае вязкоупругой среды можно наблюдать только L и St волны, так как S

и псевдорелеевская волны практически затухли из-за большого значения $Q_S = 5$.

Сравнение двух результатов показывает, что в вязкоупругом случае амплитуда волны Стоунли, как и следовало ожидать, имеет меньшую амплитуду и большее затухание. Этот вывод иллюстрирует рис. 5, на котором представлены для случаев $\kappa_0 = 0,1$ Д и $0,5$ Д фазовые скорости и затухания волны Стоунли. Они получены с помощью алгоритма матричных пучков или процедуры разложения волнового поля на сумму плоских волн [27, 28].

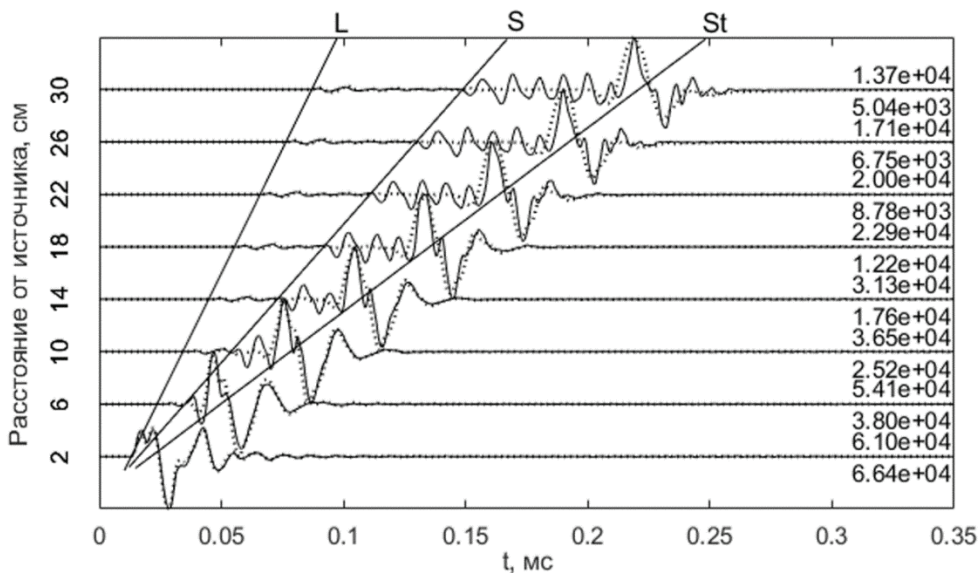


Рис. 4. Волновые картины, полученные в результате моделирования лабораторного эксперимента, в случае упругой (сплошная линия, верхние значения – амплитуда в Па) и вязкоупругой (пунктирная линия, нижние значения – амплитуды в Па) сред Био, когда $\kappa_0 = 0,1$ Д и $f_{peak} = 50$ кГц. L – головная продольная волна, S – головная поперечная волна, St – волна Стоунли

Fig. 4. Waveforms obtained in laboratory experiment modelling for elastic (solid line, upper values are amplitudes in Pascal) and viscoelastic (dashed line, lower values are amplitudes in Pascal) Biot formations when $\kappa_0 = 0,1$ D and $f_{peak} = 50$ kHz. L and S denote head longitudinal and shear waves, respectively, St denotes Stoneley wave

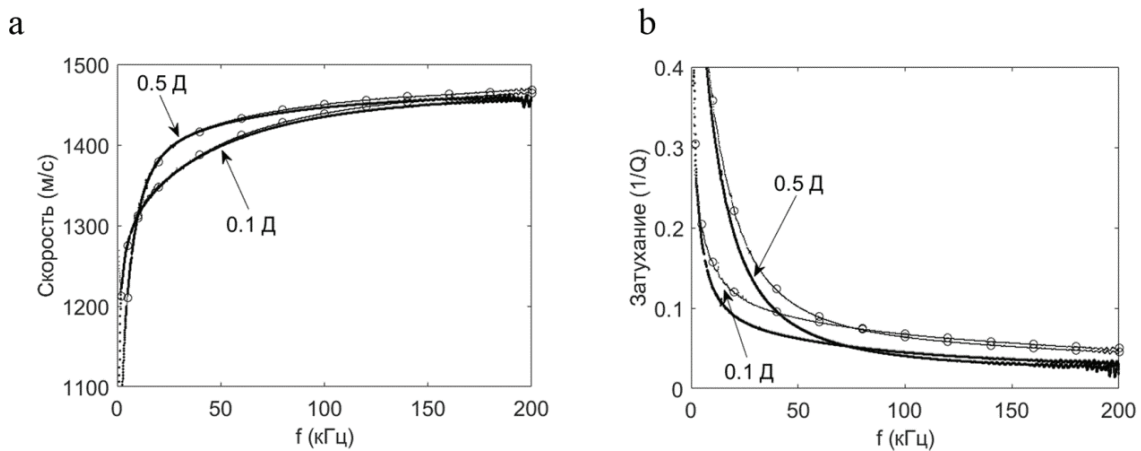


Рис. 5. Фазовые скорости (а) и затухания (б) волны Стоунли для упругой (толстая линия) и вязкоупругой (тонкая линия) сред Био. Кружки – аналитические результаты. Шифры кривых – значения проницаемостей

Fig. 5. Phase velocities (a) and attenuation (b) of Stoneley wave in case of elastic (thick line) and viscoelastic (thin line) Biot formations. Circles denotes analytical results. Curves' markings are the values of permeability

Эта процедура используется и далее для получения подобных результатов. Рис. 5а также показывает, что в обоих случаях скорости практически совпадают, что, в принципе, должно наблюдаться. Небольшое превышение скоростей в вязкоупругом случае видно только на высоких частотах. Волна Стоунли отличается тем, что она наиболее чувствительна к проницаемости среды и может быть эффективно использована для ее оценки [28-30], что также показывает рис. 5. С другой стороны, рис. 5b также демонстрирует, что волна Стоунли по лабораторным измерениям может быть использована для оценки вязкоупругих свойств среды [8, 9].

На рис. 5 дополнительно показаны аналитические результаты для вязкоупругого случая. Как видно, аналогичные численные результаты практически совпадают с ними.

8. Моделирование дипольного акустического каротажа

Эскиз моделируемой задачи изображен на рис. 2b. Основная расчетная область (в метрах) имеет размеры $\{r, z: [0, 1.5] \times [-1.5, 4]\}$. Шаг по r и z был выбран равномерным и равным 1 см, в NPMML использовалось 20 точек.

Прибор моделировался в виде бесконечного цилиндра радиусом 5 см. Излучающей поверхностью дипольного источника ξ , имеющего высоту 5 см, являлась только его боковая грань S . Скорости смещения боковой грани задавались одинаковыми так, что их амплитуда при $\varphi = 0$

полагалась равной 1 мкм. Использовался также импульс Берлаге (рис. 3а). Торцы Z источника оставались неподвижными. Так как рассматривался дипольный излучатель, то остальная часть прибора НФ моделировалась обычно как «тяжелая» жидкость: $k_{НФ} = 4 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho_{НФ} = 3100$ кг·м⁻³ ($V_{НФ} = 3600$ м·с⁻¹)

Прибор центрировано располагался в скважине радиусом 12 см. Упругая среда Био, окружающая скважину, могла быть быстрой ($V_S > V_{BS}$) или медленной ($V_S < V_{BS}$). В быстрой среде на нулевой частоте полагалось: $V_L = 3770$ м·с⁻¹ и $V_S = 2240$ м·с⁻¹; в медленной – $V_L = 2500$ м·с⁻¹ и $V_S = 1000$ м·с⁻¹. Остальные, общие значения параметров сред были следующими: $k_S = 3,9 \cdot 10^9$ Па, $\mu = 4,5 \cdot 10^9$ Па, $\rho_S = 2650$ кг·м⁻³, $\phi = 0,168$, $\alpha_\infty = 3,33$, $k_f = 2,25 \cdot 10^9$ Па, $\rho_f = 1000$ кг·м⁻³, $\eta = 0,001$ Па·с, $\kappa_0 = 0,125$ Д ($f_b = 64$ кГц) или 0,5 Д (16 кГц).

Скважинный флюид BS был таким же, что и поровая жидкость, но невязким. Глинистая корка задавалась параметром $a=0$, т.е. поры были открытыми.

На рис. 6 изображены волновые картины для быстрой среды Био, когда $\kappa_0 = 0,125$ Д и $f_{\text{peak}} = 7$ кГц. Рисунок показывает, что волновое поле состоит практически из головной поперечной волны S , следующего за ней аналога псевдорелеевской волны (не обозначена) и далее изгибающей волны FI (flexural), подобной волне Стоунли в случае монополюсного излучателя [26, 28]. Головная продольная волна L имеет очень маленькую амплитуду, так как источник является дипольным, а среда – быстрой.

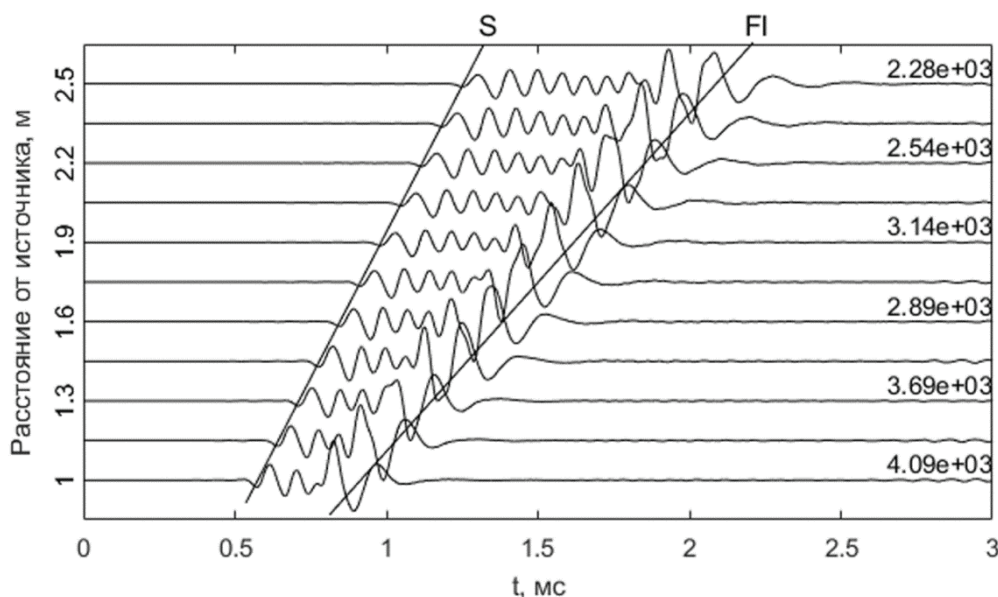


Рис. 6. Волновые картины дипольного акустического каротажа для быстрой среды Био, $\kappa_0 = 0,125$ Д, $f_{\text{peak}} = 7$ кГц, $\varphi = 0$. S – головная поперечная волна, FI – изгибающая волна, значения – амплитуды в Па

Fig. 6. Waveforms of dipole acoustic logging for fast Biot formation, $\kappa_0 = 0,125$ D, $f_{\text{peak}} = 7$ kHz, $\varphi = 0$. S and FI denote shear and flexural waves, respectively. Values related to amplitudes in Pascal (Pa)

На рис. 7 показаны волновые картины для медленной среды Био, когда $\kappa_0=0,125$ Д и $f_{\text{peak}} = 4$ кГц. Явно выделяются головная волна L и следующая за ней изгибная волна Fl . Так как головная волна S теперь не может образовываться [28], то амплитуда волны L значительно возрастает. В обоих случаях сред Био видно, что изгибная волна обладает дисперсией по скорости и затуханию.

Это также демонстрирует рис. 8, на котором сплошной линией отображаются фазовые скорости и затухания изгибной волны в случае быстрой среды, у которой $\kappa_0=0,125$ Д и 0,5 Д. Для возможности сравнения с аналитическими результатами, изображенными на рисунке кружками, прибор полагался абсолютно жестким. Как видно, модельные результаты хорошо совпадают с аналитическими.

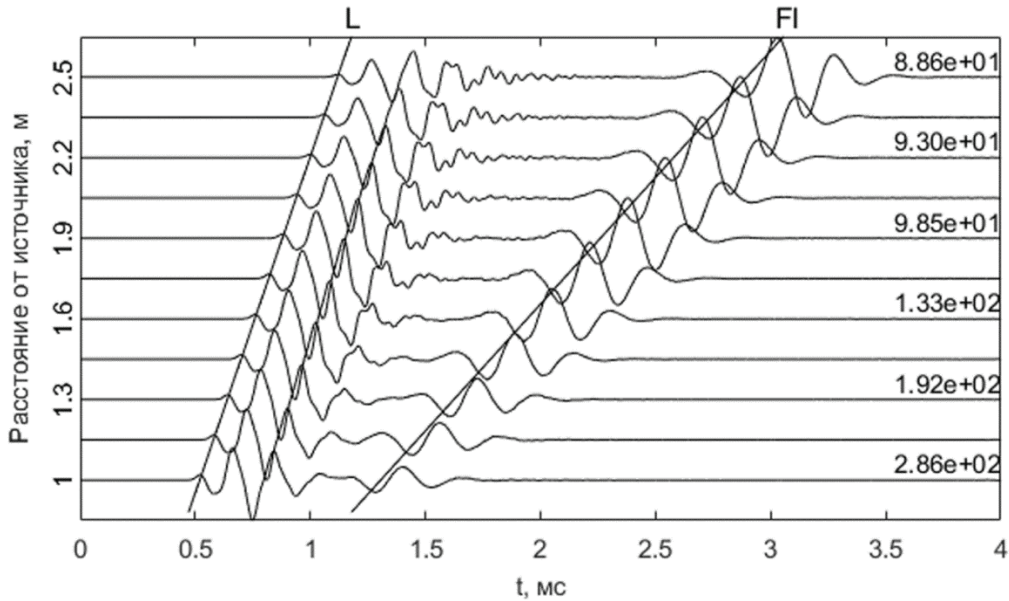


Рис. 7. Волновые картины дипольного акустического каротажа для медленной среды Био, $\kappa_0 = 0,125$ Д, $f_{\text{peak}} = 4$ кГц, $\varphi = 0$. L – головная продольная волна, Fl – изгибная волна, значения – амплитуды в Па

Fig. 7. Waveforms of dipole acoustic logging for slow Biot formation, $\kappa_0 = 0,125$ D, $f_{\text{peak}} = 4$ kHz, $\varphi = 0$. L and Fl denote longitudinal and flexural waves, respectively. Values related to amplitudes in Pascal (Pa)

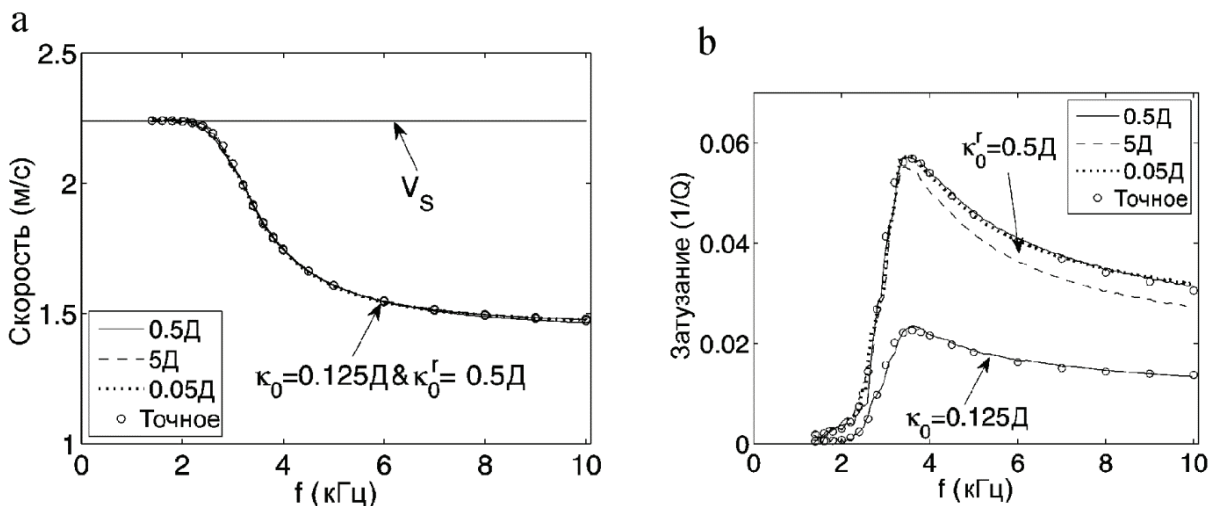


Рис. 8. Фазовые скорости (а) и затухания (б) изгибной волны для быстрой среды Био. Шифры кривых – значения проницаемостей. Сплошные линии и кружки – модельные и аналитические результаты, соответственно. Пунктирная и точечная линии – результаты, когда проницаемости в вертикальном направлении равны 5 Д и 0,05 Д, т.е. на порядок отличаются от радиальной проницаемости

Fig. 8. Phase velocities (a) and attenuations (b) of flexural wave for fast Biot formation. Curves' markings are the values of permeability. The solid lines and circles are the modelling and analytical results, respectively. Dashed and dotted lines are results when the permeabilities in the vertical direction are equal to 5 D and 0,05 D, respectively, i.e., an order of magnitude different from radial permeability

Рис. 8 также показывает, что фазовая скорость изгибной волны фактически не зависит от значений проницаемости, а затухание – значительно. На рис. 8 дополнительно приведены два результата, для которых проницаемости в осевом направлении на порядок отличались от радиальной или перпендикулярной проницаемости: $\kappa_0^z = 0,05 \text{ Д}$ (точечная линия) и 5 Д (пунктирная линия); $\kappa_0^r = \kappa_0^\varphi = 0,5 \text{ Д}$. Они были получены, используя в уравнениях (27) или (27') одинаковые значения проницаемости по r , φ и отличные по z . Таким образом моделировалась трансверсальная псевдоанизотропия среды по проницаемости. Рисунок показывает, что фазовая скорость волны фактически не зависит от значений проницаемости по направлениям, а затухание – в общем, слабо. Следовательно, на затухание изгибной волны существенное влияние оказывает проницаемость только в радиальном направлении, как и для волны Стоунли. На рис. 8а также видно, что изгибная волна имеет частоту отсечки, на которой ее скорость совпадает с $V_S = 2240 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$. Это известное свойство изгибной волны используется для оценки V_S в случае медленных сред [28].

На рис. 9 представлены фазовые затухания изгибной волны в случаях быстрой и медленной сред, в которых $\kappa_0 = 0,125 \text{ Д}$ и $0,5 \text{ Д}$. Прибор моделировался как «тяжелая» жидкость. Результаты для фазовых скоростей не приведены, так как они практически совпадают аналогично результатам рис. 8а. Для быстрой формации также приведены подобные результаты для волны Стоунли. Рис. 9 показывает, что затухание изгибной волны очень чувствительно к проницаемости среды, как и волны Стоунли, и может быть использовано для такой оценки, что ранее и было предложено в [31]. С другой стороны, затухание может оказаться даже больше затухания волны Стоунли, однако на более высоких частотах.

Моделирование более сложной конструкции прибора позволит понять его влияние на оценку проницаемости среды.

9. Моделирование в сейсморазведке

На рис. 10а приведен эскиз моделируемой задачи (расстояния заданы в метрах). Рассматривается горизонтально-слоистая среда.

Верхний слой AIR представляет собой воздух со скоростью $V_L = 330 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$ и плотностью $\rho = 1,2 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$, далее следуют три упругих слоя: слой EL1, в котором $V_L = 2500 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$, $V_S = 1400 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$ и $\rho = 2000 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$; слой EL2 – $V_L = 3500 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$, $V_S = 2000 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$ и $\rho = 2200 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$; слой EL3 – $V_L = 4500 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$, $V_S = 2600 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$ и $\rho = 2600 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$. Слой EL2 мог моделироваться как вязкоупругий.

При расчетах была выбрана неравномерная сетка. Шаг по r и z в начале координат равнялся 1 м, далее от 100 м до 130 м он плавно возрастал до 2 м и далее не менялся. В NPML использовалось 30 точек.

В качестве временной зависимости заглубленного источника `$solid` использовался импульс Рикера с центральной частотой $f_{\text{peak}} = 25 \text{ Гц}$:

$$f(t) = -\left(1 - 2(\omega_1(t - t_s))^2\right) \exp\left(-(\omega_1(t - t_s))^2\right), \quad (60)$$

$$\omega_1 = \pi f_{\text{peak}}, \quad t_s = (3 - 5) / \omega_1.$$

Нормированный импульс и его амплитудный спектр изображены на рис. 10б. Импульс Рикера, в отличие от импульса Берлаге, имеет плавный выход из нуля и, следовательно, более узкий спектр. Его часто используют в моделировании задач сейсморазведки, так как он позволяет превратить каждое нормальное отражение от границ сред в симметричный нуль-фазовый импульс. Датчики компонент скоростей смещений располагались на дневной поверхности слоя EL1, т.е. когда $z = 10 \text{ м}$

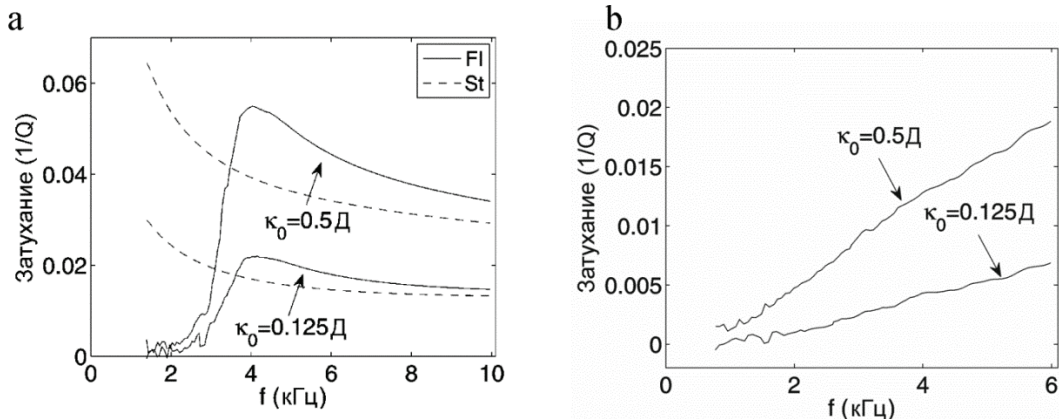


Рис. 9. Фазовые затухания изгибной волны для быстрой (а) и медленной (б) сред Био. Шифры кривых – значения проницаемостей. Сплошная линия – изгибная волна, пунктирная линия – волна Стоунли

Fig. 9. Phase velocities (a) and attenuations (b) of flexural wave for fast and slow Biot formations. Curves' markings are the values of permeability. The solid line is flexural wave; the dashed line is Stoneley wave

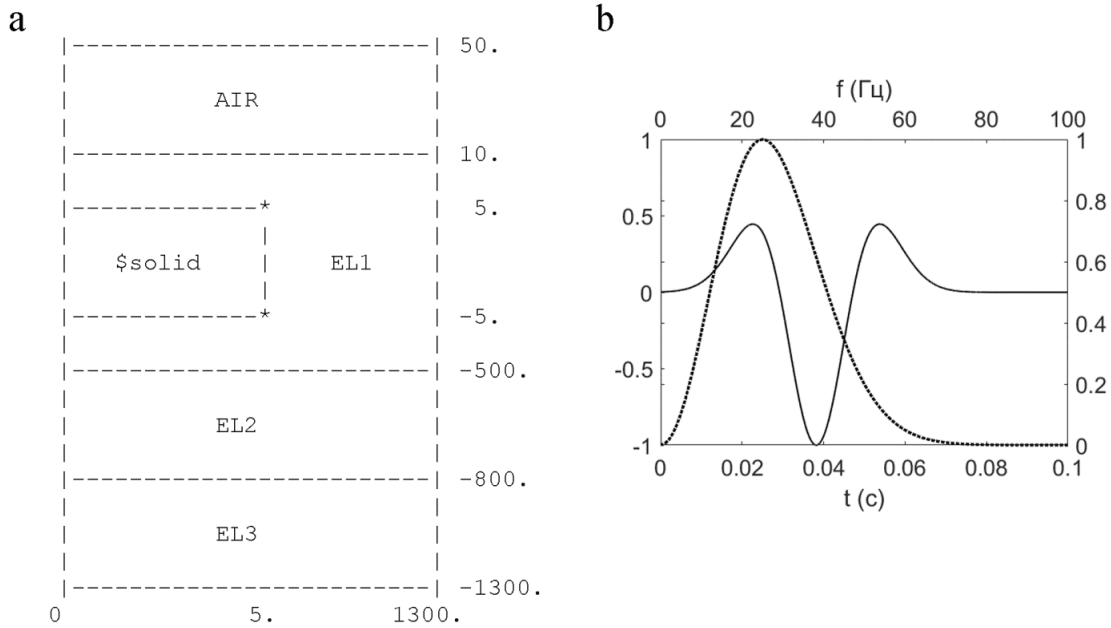


Рис 10. Эскиз моделируемой задачи сейсморазведки (а); нормированный импульс Рикера и его амплитудный спектр (b)

Fig. 10. Sketch of modelled seismic exploration task (a); Ricker's normalized impulse and its amplitude spectrum (b)

На рис. 11 представлены синтетические сейсмограммы u^z -компоненты поля в случае источника типа центра расширения (взрыв) в отсутствии (а) и при наличии (b) поглощения в среде EL2, когда полагалось $Q_L=5$ и $Q_S=2$. На рисунке L_1 обозначает прямую продольную волну от источника, индекс 1 – номер среды, которую прошла волна; L_1S_1 – обменную волну, т.е. волну S_1 , образовавшуюся из прямой продольной L_1 при ее отражении от границы раздела EL1 и EL2 сред; $L_{11} = L_1L_1$ – монотипную волну; L^1 – прямую волну, падающую на границу EL1 среды с воздухом и т.п.; Rl – поверхностную волну Рэлея. Годографы L_1 и Rl волн, т.е. зависимости времени прихода волны от положения точки наблюдения, представляют собой прямые линии, для остальных волн – гиперболы [32]. Сравнение обеих сейсмограмм показывает, что монотипная L_{1221} и обменная L^1S_{1221} волны, возникшие в упругой среде EL2 (рис. 11a), теперь отсутствуют в случае вязкоупругой среды EL2 (рис. 11b) из-за больших значений Q_L - и Q_S -факторов.

На рис. 12 представлены синтетические сейсмограммы u^φ -компоненты поля, когда $\varphi = 0$, полученные для точечного источника типа концентрированной силы в φ -направлении, в отсутствие поглощения в среде EL2 (а) и при его наличии (b), задаваемого значениями $Q_L = 20$ и $Q_S = 2$. Когда $\varphi = 0$, в декартовых координатах (x, y, z) y -направление совпадает с φ -направлением. От такого источника, расположенного непосредственно на границе EL1 среды с воздухом, в безграничной среде образуется только поперечная волна, имеющая

одинаковую интенсивность по всем углам с вертикалью [32]. Так как в нашем случае источник располагается несколько ниже этой границы, можно наблюдать прямую волну L_1 малой амплитуды. Сравнение обеих сейсмограмм показывает, что поперечная волна S_{1221} , образовавшаяся в упругой среде EL2 (рис. 12a), практически не регистрируется в случае вязкоупругой среды EL2 (рис. 12b) из-за большего Q_S -фактора.

Таким образом, использование вязкоупругих сред может, например, упростить изучение сейсмического поля, которое даже для рассмотренной простой модели с точечным источником типа взрыва имеет непростой вид. С другой стороны, может позволить также проанализировать динамические параметры сейсмического поля (затухания).

Заключение

Предложенная модель вязкоупругой среды Био и ее частные случаи с использованием разложения решения по азимутальному углу позволяют значительно расширить круг моделируемых задач по акустике, в том числе в широком диапазоне частот. Численные результаты в аксиально-симметричном случае, полученные с помощью явной конечно-разностной схемы на сдвинутых сетках с переменным шагом и экономичным алгоритмом вычисления свертки, находятся в хорошем согласии с аналитическими результатами.

Ключевые слова: вязкоупругость, модель Био, акустический каротаж, сейсморазведка, математическое моделирование.

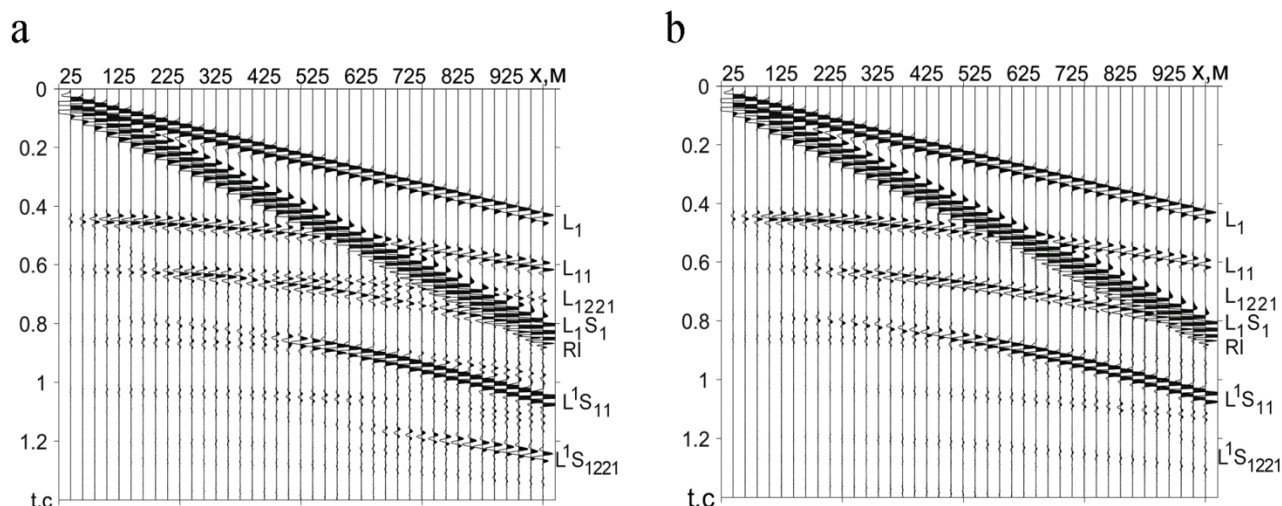


Рис. 11. Сейсмограммы z-компоненты скорости смещения в случае источника типа центра расширения: а – среда EL2 без затухания; б – в среде EL2 факторы $Q_L = 5$ и $Q_S = 2$.
Описание обозначений волн дано в тексте

Fig. 11. Seismograms of z-component of displacement velocity in the case of source type of center expansion. Formation EL2 is without attenuation. Factors $Q_L = 5$ and $Q_S = 2$ in formation EL2. Description of wave notations is given in the main text

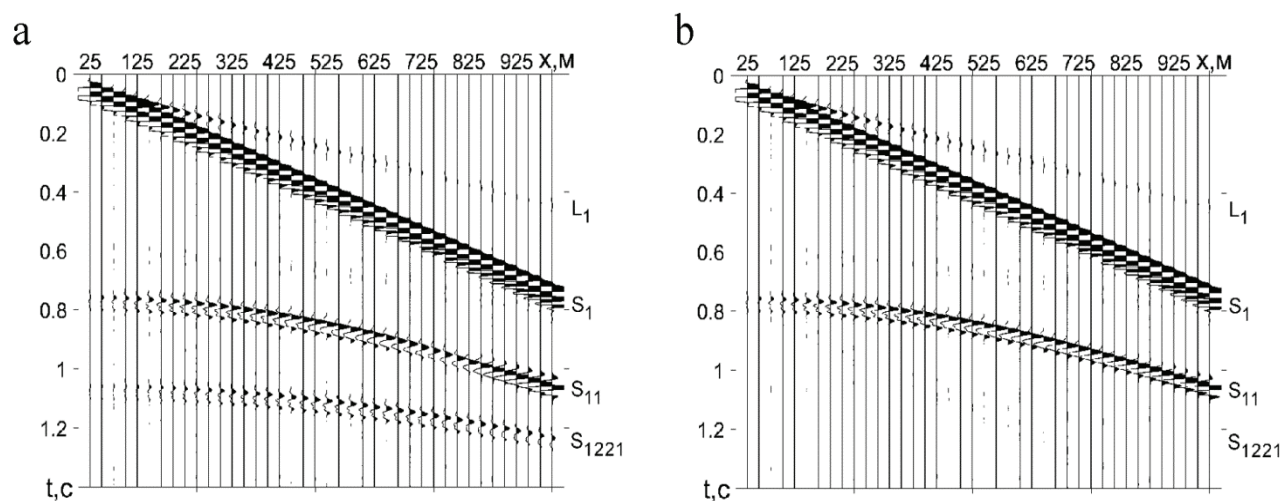


Рис. 12. Сейсмограммы y-компоненты скорости смещения в случае источника типа концентрированной силы в y-направлении: а – среды EL2 без затухания; б – в среде EL2 факторы $Q_L = 20$ и $Q_S = 2$.
Описание обозначений волн дано в тексте

Fig. 12. Seismograms of y-component of displacement velocity in the case of source type of concentrated force in y-direction. Formation EL2 is without attenuation. Factors $Q_L = 20$ and $Q_S = 2$ in formation EL2. Description of wave notations is given in the main text

ЛИТЕРАТУРА

1. Уайт Дж. Э. Возбуждение и распространение сейсмических волн. – М. : Недра, 1986. – 261 с.
2. Фаворская А.В., Петров И.Б., Голубев В.И., Хохлов Н.И. Численное моделирование сеточно-характеристическим методом воздействия землетрясения на сооружения // Математическое моделирование. – 2015. – Т. 27, № 12. – С. 109-120.
3. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология: теории и методы : в 2 т. Т. 1. – М. : Мир, 1983. – 520 с.

4. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. – М. : Мир, 1974. – 228 с.
5. Плющенко Б.Д., Турчанинов В.И., Никитин А.А. Моделирование сейсмоакустических полей в аксиально-симметричных поглощающих средах. Постановка задачи // Математическое моделирование. – 2017. – Т. 29, № 9. – С. 62-76.
6. Carcione J.M. Viscoelastic effective rheologies for modeling wave propagation in porous media // Geophysical Prospecting. – 1998. – V. 46. – P. 249-270.

7. Arntsen B., Carcione J.M. Numerical simulation of the Biot slow wave in water-saturated Nivel-steiner Sandstone // *Geophysics*. – 2001. – V. 66, No. 3. – P. 890-896.
8. Dyshlyuk E., Parshin A.V., Charara M.G., Nikitin A.A., Plyushchenkov B.D. In-Situ Viscosity from Acoustic Logging // SPE Annual Technical Conference and Exhibition, USA, Colorado, Denver, 30 Oct. – 2 Nov 2011 : Proceedings. – SPE 146023, 2011. – P. 1-12.
9. Ильясов Х.Х. Исследование акустических волн в слоистых гидроупругих средах : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.02.05 / Институт проблем механики РАН. – М., 2005.
11. Mavko G., Mukerji T., Dvorkin J. *The Rock Physics Handbook*. – Cambridge University Press, 2009. – 329 p.
12. Плющенко Б.Д., Турчанинов В.И., Никитин А.А. Моделирование сейсмоакустических полей в аксиально-симметричных поглощающих средах. Разностная схема // *Математическое моделирование*. – 2018. – Т. 30, № 4. – С. 21-42.
13. Ben-Menahem A., Singh S.J. *Seismic Waves and Sources*. – New York : Springer-Verlag, 1981. – 1126 p.
14. Plyushchenkov B.D., Turchaninov V.I. Optimum approximation of convolution of arbitrary grid function with the power kernel // *Poromechanics II* / J.L. Auriault et al. (eds) – Lisse : Swets and Zeitlinger, 2002. – P. 753-756. ISBN 90 5809 394 8.
15. Плющенко Б.Д., Турчанинов В.И. Пошаговая свертка // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. – 2009. – № 24. – 24 с. – URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-24> (дата обращения: 04.04.2019).
16. Asvadurov S., Knizhnermanz L., Pabon J. Finite-difference modeling of viscoelastic materials with quality factors of arbitrary magnitude // *Geophysics*. – 2004. – V. 69, No. 3. – P. 817-824.
17. Johnson D.L., Koplik J., Dashen R. Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1987. – V. 176. – P. 379-402.
18. Johnson D.L. Scaling function for dynamic permeability in porous media // *Phys. Rev. Lett.* – 1989. – V. 63, No. 5. – P. 580-583.
19. Nikitin A.A., Plyushchenkov B.D., Segal A.Yu. Properties of low-frequency trapped mode in viscous-fluid waveguides // *Geophysical Prospecting*. – 2016. – V. 64, No. 5. – P. 1335-1349.
20. Plyushchenkov B.D., Turchaninov V.I. Solution of Pride's equation through potentials // *Int. J. Mod. Phys. C*. – 2006. – V. 17, No. 6. – P. 877-908.
21. Liu H.-L., Johnson D.L. Effects of an elastic membrane on tube waves in permeable formations // *Journal Acoustic Society of America*. – 1997. – V. 101, No. 6. – P. 3322-3329.
22. Liu Q.H., Sinha B.K. A 3D cylindrical PML/FDTD method for elastic waves in fluid-filled pressurized boreholes in triaxially stressed formations // *Geophysics*. – 2003. – V. 68, No. 5. – P. 1731-1743.
23. Wang T., Tang X. Finite-difference modeling of elastic wave propagation: A nonsplitting perfectly matched layer approach // *Geophysics*. – 2003. – V. 68, No. 5. – P. 1749-1755.
24. Plyushchenkov B.D., Turchaninov V.I. Acoustic logging modelling by refined Biot's equations // *Int. J. Mod. Phys. C*. – 2000. – V. 11, No. 2. – P. 365-396.
25. Ryaben'kii V.S. *Method of difference potentials and its applications*. – Springer Verlag, 2002. – 538 p.
26. Randall C.J., Scheibner D.J., Wu P.T. Multipole borehole acoustic waveforms: Synthetic logs with beds and borehole washouts // *Geophysics*. – 1991. – V. 56, No. 11. – P. 1757-1769.
27. Hua Y., Sarkar T.K. Matrix Pencil Method of Estimating Parameters of Exponentially Damped/Undamped Sinusoids in Noise // *IEEE Transactions on Acoustics : Speech and Signal Processing*. – 1990. – V. 38, No. 5. – P. 814-824.
28. Tang X.M., Cheng A. *Quantitative Borehole Acoustic Methods*. – Elsevier Ltd., Seismic Exploration. – 2004. – V. 24. – 255 p.
29. Brie D., Endo T., Johnson D.L., Pampuri F. Quantitative formation permeability evaluation from Stoneley waves // SPE 49131. – 1998. – P. 1-12.
30. Plyushchenkov B.D., Nikitin A.A. Borehole Acoustic and Electric Stoneley Waves and Permeability // *Journal of Computational Acoustics*. – 2010. – V. 18, No. 2. – P. 1-29.
31. Wang K.-X., Ma J., Wu X.-Y., Zhang B.-X. Determination of permeability from flexural waves in dipole acoustic logging // *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, 1999. – P. 33-36.
32. Боганик Г.Н., Гурвич И.И. *Сейсморазведка*. – Тверь : Изд-во АИС, 2006. – С. 744.

REFERENCES

- White J.E. *Underground Sound: Application of Seismic Waves*. Elsevier, 1983. 253 p.
- Favorskaia A.V., Petrov I.B., Golubev V.I., Khokhlov N.I. Chislennoe modelirovanie setochno-kharakteristicheskim metodom vozdeistviia zemletriaseniia na sooruzheniia // *Matematicheskoe modelirovanie*. 2015. V. 27, No. 12. P. 109-120.
- Aki K., Richards P.G. *Quantitative Seismology: Theory and Methods*. San Francisco : W.H. Freeman and Co. V. I. 1980. 557 p.
- Christensen R.M. *Theory of Viscoelasticity: An Introduction*. New York : Acad. Press, 1971. 245 p.
- Plyushchenkov B.D., Turchaninov V.I., Nikitin A.A. Modelirovaniye seysmoakusticheskikh poley

- v aksial'no-simmetrichnykh pogloshchayushchikh sredakh. Postanovka zadachi // Matematicheskoe modelirovanie. 2017. V. 29, No. 9. P. 62-76.
6. Carcione J.M. Viscoelastic effective rheologies for modeling wave propagation in porous media // Geophysical Prospecting. 1998. V. 46. P. 249-270.
7. Arntsen B., Carcione J.M. Numerical simulation of the Biot slow wave in water-saturated Nivelsteiner Sandstone // Geophysics. 2009. V. 66, No. 3. P. 890-896.
8. Dyshlyuk E., Parshin A.V., Charara M.G., Nikitin A.A., Plyushchenkov B.D. InSitu Viscosity from Acoustic Logging // SPE Annual Technical Conference and Exhibition, USA, Colorado, Den-ver, 30 Oct. – 2 Nov 2011 : Proceedings. SPE 146023, 2011. P. 1-12.
9. Il'yasov Kh.Kh. Issledovaniye akusticheskikh voln v sloistykh gidrouprugikh sredakh // Dis. na soisk. uch. st. k.f.-m.n. : 01.02.05 / Institut problem mekhaniki RAN. Moscow, 2005.
10. Biot M.A. Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media // Journal Acoustic Society of America. 1962. V. 34, No. 9. P. 1254-1264.
11. Mavko G., Mukerji T., Dvorkin J. The Rock Physics Handbook. Cambridge University Press, 2009. 329 p.
12. Plyushchenkov B.D., Turchaninov V.I., Nikitin A.A. Modelirovaniye seysmoakusticheskikh poley v aksial'no-simmetrichnykh pogloshchayushchikh sredakh. Raznostnaya skhema // Matematicheskoe modelirovanie. 2018. V. 30, No. 4. P. 21-42.
13. Ben-Menahem A., Singh S.J. Seismic Waves and Sources. New York : Springer-Verlag, 1981. 1126 p.
14. Plyushchenkov B.D., Turchaninov V.I. Optimum approximation of convolution of arbitrary grid function with the power kernel // Poromechanics II / J.L. Auriault et al. (eds). Lisse : Swets and Zeitlinger, 2002. P. 753-756. ISBN 90 5809 394 8.
15. Plyushchenkov B.D., Turchaninov V.I. Poshagovaia svertka // Preprint In. prikl. mat. im. M.V. Keldysha RAN. 2009. No. 24. 24 p. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-24> (date of access: 04.04.2019).
16. Asvadurov S., Knizhnermanz L., Pabon J. Finite-difference modeling of viscoelastic materials with quality factors of arbitrary magnitude // Geophysics. 2004. V. 69, No. 3. P. 817-824.
17. Johnson D.L., Koplik J., Dashen R. Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media // Journal of Fluid Mechanics. 1987. V. 176. P. 379-402.
18. Johnson D.L. Scaling function for dynamic permeability in porous media // Phys. Rev. Lett. 1989. V. 63, No. 5. P. 580-583.
19. Nikitin A.A., Plyushchenkov B.D., Segal A.Yu. Properties of low-frequency trapped mode in viscofluid waveguides // Geophysical Prospecting. 2016. V. 64, No. 5. P. 1335-1349.
20. Plyushchenkov B.D., Turchaninov V.I. Solution of Pride's equation through potentials // Int. J. Mod. Phys. C. 2006. V. 17, No. 6. P. 877-908.
21. Liu H.-L., Johnson D.L. Effects of an elastic membrane on tube waves in permeable formations // Journal Acoustic Society of America. 1997. V. 101, No. 6. P. 3322-3329.
22. Liu Q.H., Sinha B.K. A 3D cylindrical PML/FDTD method for elastic waves in fluid-filled pressurized boreholes in triaxially stressed formations // Geophysics. 2003. V. 68, No. 5. P. 1731-1743.
23. Wang T., Tang X. Finite-difference modeling of elastic wave propagation: A nonsplitting perfectly matched layer approach // Geophysics. 2003. V. 68, No. 5. P. 1749-1755.
24. Plyushchenkov B.D., Turchaninov V.I. Acoustic logging modelling by refined Biot's equations // Int. J. Mod. Phys. C. 2000. V. 11, No. 2. P. 365-396.
25. Ryaben'kii V.S. Method of difference potentials and its applications. Springer Verlag, 2002. 538 p.
26. Randall C.J., Scheibner D.J., Wu P.T. Multipole borehole acoustic waveforms: Synthetic logs with beds and borehole washouts // Geophysics. 1991. V. 56, No. 11. P. 1757-1769.
27. Hua Y., Sarkar T.K. Matrix Pencil Method of Estimating Parameters of Exponentially Damped/Undamped Sinusoids in Noise // IEEE Transactions on Acoustics : Speech and Signal Processing. 1990. V. 38, No. 5. P. 814-824.
28. Tang X.M., Cheng A. Quantitative Borehole Acoustic Methods. Elsevier Ltd., Seismic Exploration. V. 24. 2004. 255 p.
29. Brie D., Endo T., Johnson D.L., Pampuri F. Quantitative formation permeability evaluation from Stoneley waves // SPE 49131. 1998. P. 1-12.
30. Plyushchenkov B.D., Nikitin A.A. Borehole Acoustic and Electric Stoneley Waves and Permeability // Journal of Computational Acoustics. 2010. V. 18, No. 2. P. 1-29.
31. Wang K.-X., Ma J., Wu X.-Y., Zhang B.-X. Determination of permeability from flexural waves in dipole acoustic logging // SEG Technical Program Expanded Abstracts. 1999. P. 33-36.
32. Bogatik G.N., Gurchich I.I. Sesorazvedka. Tver : Publishing house AIS, 2006. 744 p.