

УДК 514.181.25

© Б.У. Хаитов

Б.У. Хаитов

# ЦИФРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЛЬЕФА ДЛЯ ЗАДАЧ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА МЕСТНОСТИ

## Введение

В большинстве задач инженерного проектирования требуется наиболее полноценный анализ рельефа местности для принятия оптимальных решений. В частности в задачах проведения оптимальных авто- и железнодорожных путей сообщения с учетом требований, наложенных на проект, в задачах проведения оптимальных гидротехнических (каналов и дренажных) сооружений, в задачах проектирования вертикальной планировки мелиоративных земель сельского хозяйства с учетом максимального сохранения плодородного слоя почвы, в проектировании промышленных и гражданских сооружений с учетом естественного водоотведения, в принятии решений быстрой дислокации сил и средств военного назначения по бездорожью, в определении участков селей и грязевых оползней в населенных пунктах предгорного массива и т.д.

Было разработано программное приложение «Геоанализатор», при разработке которого были поставлены следующие цели:

- определение среднего уклона поверхности рельефа по участкам;
- определение среднего уклона поверхности рельефа в целом;
- визуальное представление образования стока поверхностных вод в виде стрелок линии ската по участкам и в целом;
- представление рельефа в виде картограммы уклонов.
- представление рельефа в виде картограммы расчлененности рельефа.

Определение линии среднего уклона [1, 2] способствовало определению плоскости среднего уклона [3]. Разработка теоретических основ степени сложности рельефа [4, 5] стала предпосылкой определения участка рельефа как квартал [4].

Программа «Геоанализатор» была разработана на основе программы «Сложность рельефа» [6]. Ядром программы построения изолиний послужила программа «Test Tri\_Dll» [7].

Программа «Геоанализатор» работает на основе первичных исходных данных (измерений), проведенных на прямоугольной регулярной сети. Методом исследований выбраны: методы начертательной геометрии, методы аналитической геометрии и дифференциально-геометрическое оперирование данными.

$$A = [z_{ij}] = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{m1} & z_{m2} & \dots & z_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

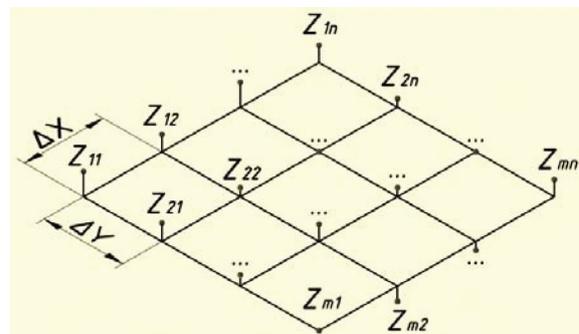


Рис. 1. Исходные данные рельефа на прямоугольной регулярной сети

Fig. 1. Baseline relief data on a rectangular regular network

**Определение-1.** Девять смежных узлов регулярной сети 3×3 назовем кварталом, состоящим из четырех ячеек, именуемых квадрантами (рис. 2):

$$[A] \equiv \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{bmatrix} \equiv [z_{ij}]. \quad (2)$$

К основным геометрическим характеристикам квартала поверхности рельефа отнесем следующие:

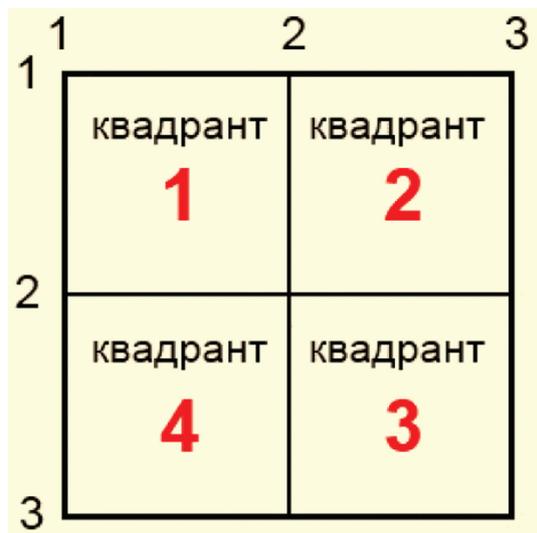


Рис. 2. Схема расположения квадрантов и определение квартала поверхности

Fig. 2. The layout of the quadrants and the definition of the quarter surface

1. Пространственное положение плоскости квартала.
2. Вертикальный угол наклона плоскости квартала относительно горизонтальной плоскости.
3. Линию ската и положение вектора ската.

**Определение-2.** Плоскость, проведенную по средним значениям исходных данных квартала в виде матрицы 3×3, назовем «плоскостью квартала».

Определение положения вектора ската означает определение координат начала и конца стрелки для ее последующей визуализации в цифровых моделях. При этом начало всегда находится в центре тяжести плоскости, а конец направлен перпендикулярно к горизонтальному следу плоскости или ее горизонтальным. Проекция вектора ската на горизонтальную плоскость также будет перпендикулярна к горизонтальному следу плоскости (рис. 3).

Плоскость квартала по определению проходит через точку  $\Delta Z_{кв}$  – среднему значению исходных данных квартала:

$$\Delta Z_{кв} = \frac{\sum_{i=j=1}^3 Z_{ij}}{9}. \quad (3)$$

Координатами  $\Delta Z_{кв}$  являются  $x=\Delta X$ ,  $y=\Delta Y$  – центр квартала. Ортогональная проекция  $\Delta Z_{кв}$  на горизонтальную плоскость есть  $\Delta Z'_{кв}$ .

Известно, что положение плоскости в пространстве определяется тремя точками, не лежащими на одной прямой, или двумя пересекающимися прямыми. Поскольку положение одной точки ( $\Delta Z_{кв}$ ) известно, следует определить положение еще двух

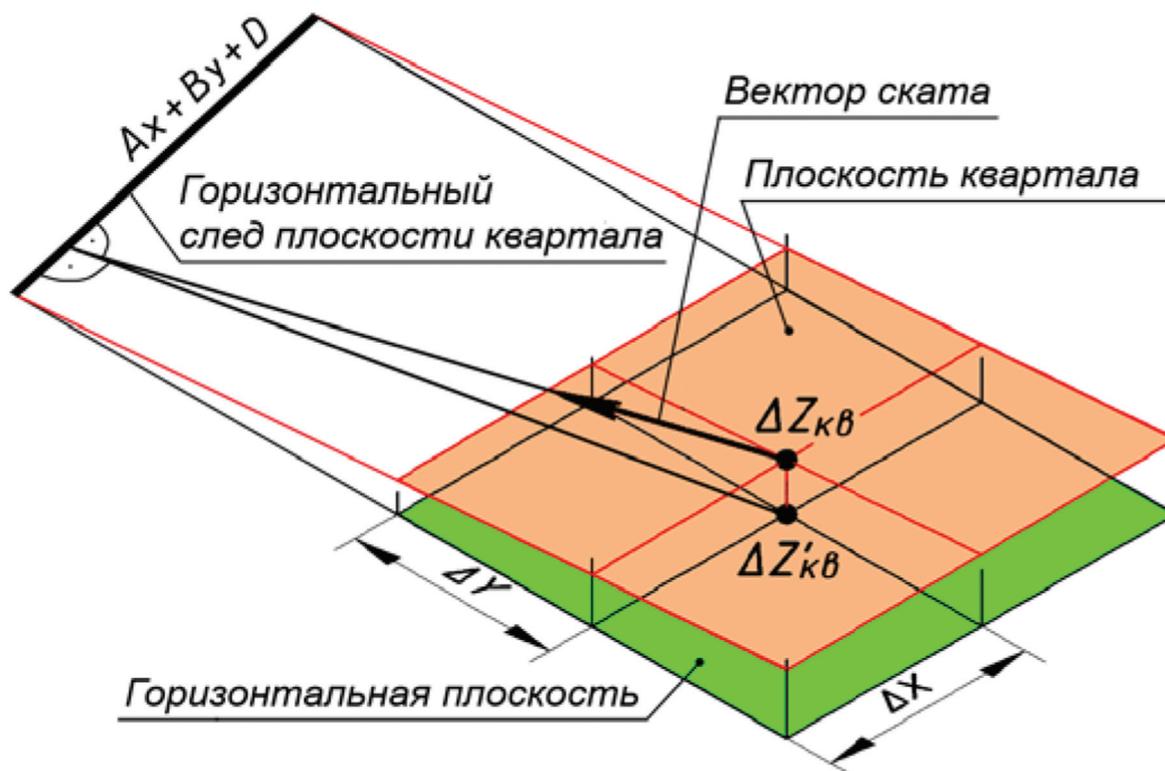


Рис. 3. Определение плоскости квартала и вектора ската

Fig. 3. Determination of the plane of the quarter and the slope vector

точек плоскости квартала, для чего сделаем ряд итерационных вычислений.

Пусть задана плоская кривая – профильное сечение рельефа в виде линейной матрицы одной строки  $m$  или одного столбца  $n$ :

$$m = (z_{11} \ z_{12} \ \dots \ z_{1j-1} \ z_{1j}) \text{ или } n = \begin{pmatrix} Z_{11} \\ Z_{21} \\ \dots \\ Z_{i-11} \\ Z_{i1} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где  $Z$  – значения превышений дискретных точек плоской кривой – исходные данные.

Как известно, аппроксимация плоской кривой в линейную функцию имеет вид:

$$z = f(k) = ak + b. \quad (5)$$

Функцию (5) не следует рассматривать как функцию построения графика прямой линии с коэффициентом  $a$ . В данной функции переменными являются коэффициенты  $a$  и  $b$ , которые следует определить, а  $k$  является счетчиком итераций для определения новых значений  $Z_{ij}$ .

Коэффициенты функции (5) определяют решением системы как для одной строки, так и для одного столбца, используя метод наименьших квадратов:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n k_i^2 + b \sum_{i=1}^n k_i = \sum_{i=1}^n k_i Z_i, \\ a \sum_{i=1}^n k_i + bn = \sum_{i=1}^n Z_i. \end{cases} \quad (6)$$

Коэффициенты  $a$  и  $b$  системы (6) можно определить методом подстановки или методом Крамера.

Среднее значение элементов одной строки –  $m$  и одного столбца –  $n$  матрицы  $3 \times 3$  будет:

$$\Delta Z_{m1} = \frac{\sum_{j=1}^3 Z_{1j}}{3} \text{ – для строк,} \quad (7)$$

$$\Delta Z_{n1} = \frac{\sum_{i=1}^3 Z_{i1}}{3} \text{ – для столбцов.}$$

Устанавливая среднее значение для каждой строки и каждого столбца матрицы  $3 \times 3$ , образуем пару новых плоских кривых – один столбец и одну строку:

$$u = \begin{pmatrix} \Delta Z_{m1} \\ \Delta Z_{m2} \\ \Delta Z_{m3} \end{pmatrix} \text{ и } v = (\Delta Z_{n1} \ \Delta Z_{n2} \ \Delta Z_{n3}). \quad (8)$$

Имея исходные данные двух плоских кривых  $u$  и  $v$ , следует их аппроксимировать в линейные функции в виде:

$$z_u = ak + b \text{ – для столбца,} \quad (9)$$

$$z_v = a'k' + b' \text{ – для строки,} \quad (10)$$

где  $k, k' = 1, 2, 3$  – счетчики итераций.

Итерационное исчисление уравнений (9) и (10) определит новые значения кривых  $u$  и  $v$ , что приведет их к прямым, проведенным по средним значениям строк и столбцов квартала (рис. 4).

При  $k = 2$  и  $k' = 2$  уравнения (9) и (10) имеют одинаковые значения, что означает: прямые средних уклонов строк и столбцов имеют общую точку пересечения и образуют плоскость. Характерно, что точка пересечения двух прямых также равна  $\Delta Z_{кв}$  (или  $\Delta Z_{кв}^0$ ) – среднему значению исходных данных квартала. Следовательно, данная плоскость является плоскостью квартала, проведенной по средним значениям строк и столбцов матрицы  $3 \times 3$ , и определяет общий уклон поверхности квартала.

Для определения уравнения плоскости квартала достаточно иметь координаты трех точек, не принадлежащих одной прямой. Уравнения (9) и (10) способствуют определению координат пяти точек (см. рис. 4).

Координатами трех точек, не принадлежащих одной прямой, были выбраны точки  $Q, R, \Delta Z_{кв}$  (рис. 5).

После ряда вычислений и преобразований было определено общее уравнение плоскости в виде:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (11)$$

где  $A = \Delta Y(2a + b - a' - b')$ ;

$$B = \Delta Xa;$$

$$C = -\Delta X \Delta Y;$$

$$D = \Delta X \Delta Y(a' + b' - a).$$

Общее уравнение плоскости квартала в виде (11) способствует определению линии ската, линии наибольшего уклона, в виде стрелки вектора ската, указывающей на направление уклона плоскости.

Для определения вектора ската было проведено 3 последовательных вычисления:

1. Вывод горизонтального следа плоскости квартала решением задачи на пересечение двух плоскостей – плоскости квартала и горизонтальной плоскости, проходящей по уровню  $z = 0$ :

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow Ax + By + D = 0. \quad (12)$$

2. Вывод горизонтали плоскости рельефа проходящей по уровню  $\Delta Z_{кв2}$  удовлетворяющей

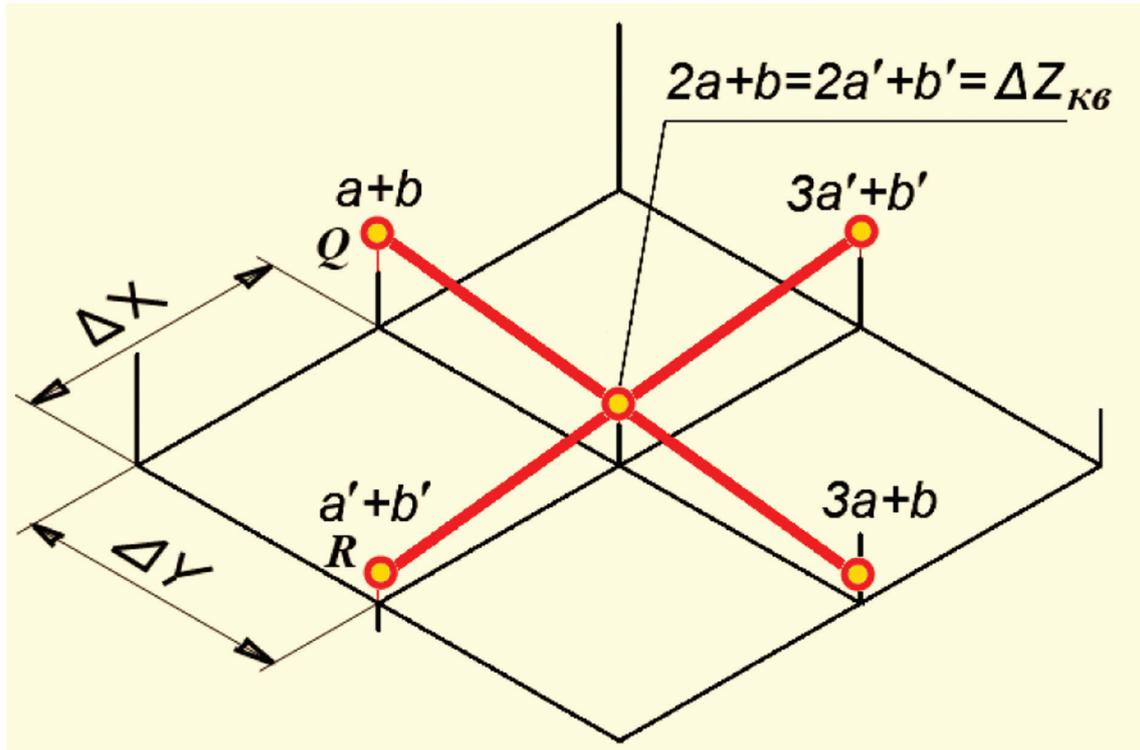


Рис. 4. Прямые, проведенные по средним значениям строк и столбцов квартала

Fig. 4. Direct drawn by the average values of rows and columns of the quarter

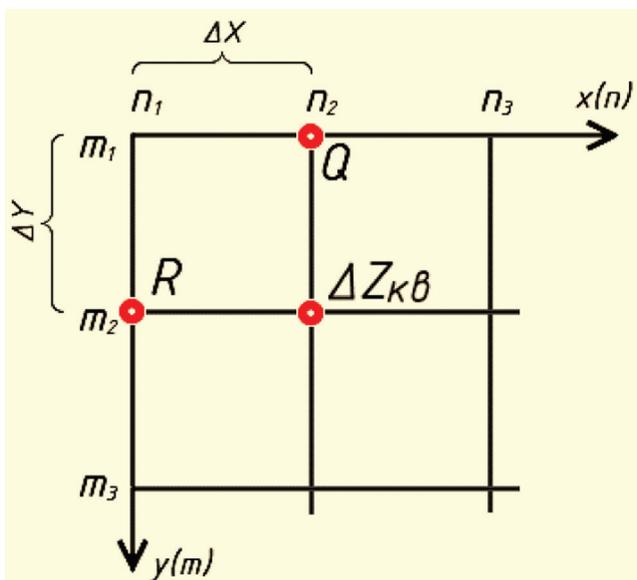


Рис. 5. Выбор трех точек Q, R, ΔZкв с учетом системы координат монитора компьютера

Fig. 5. The choice of three points Q, R, ΔZкв taking into account the coordinate system of the computer monitor

визуализации стрелки в пределах границ квартала.

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ z = \Delta Z_{кв2} \end{cases} \Rightarrow Ax + By + D_2 = 0, \quad (13)$$

где  $D_2$  – свободный член, отличный от уравнения (12).

$$\Delta Z_{кв2} = \Delta Z_{кв} - \frac{r \cdot \Delta Z_{кв}}{d}, \quad (14)$$

где  $r$  – значение предела границ плоскости квартала от центра плоскости;  $r = \Delta X$  или  $r = \Delta Y$ , наименьшее значение из них.

Примечание: в практике инженерного проектирования часто  $\Delta X = \Delta Y$ .

Системы уравнений (12) и (13) есть взаимное пересечение плоскости квартала и горизонтальных плоскостей (рис. 6).

3. Взаимное пересечение горизонтали (13) и перпендикуляра, проведенного через точку  $\Delta Z'_{кв}$ , определит точку их пересечения:

$$\begin{cases} Ax + By + D_2 = 0 \\ \pm Bx + Ay + D_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow E'(x, y). \quad (15)$$

Таким образом, проекция вектора ската –  $V_{ск}$  (рис. 7) будет иметь координаты:

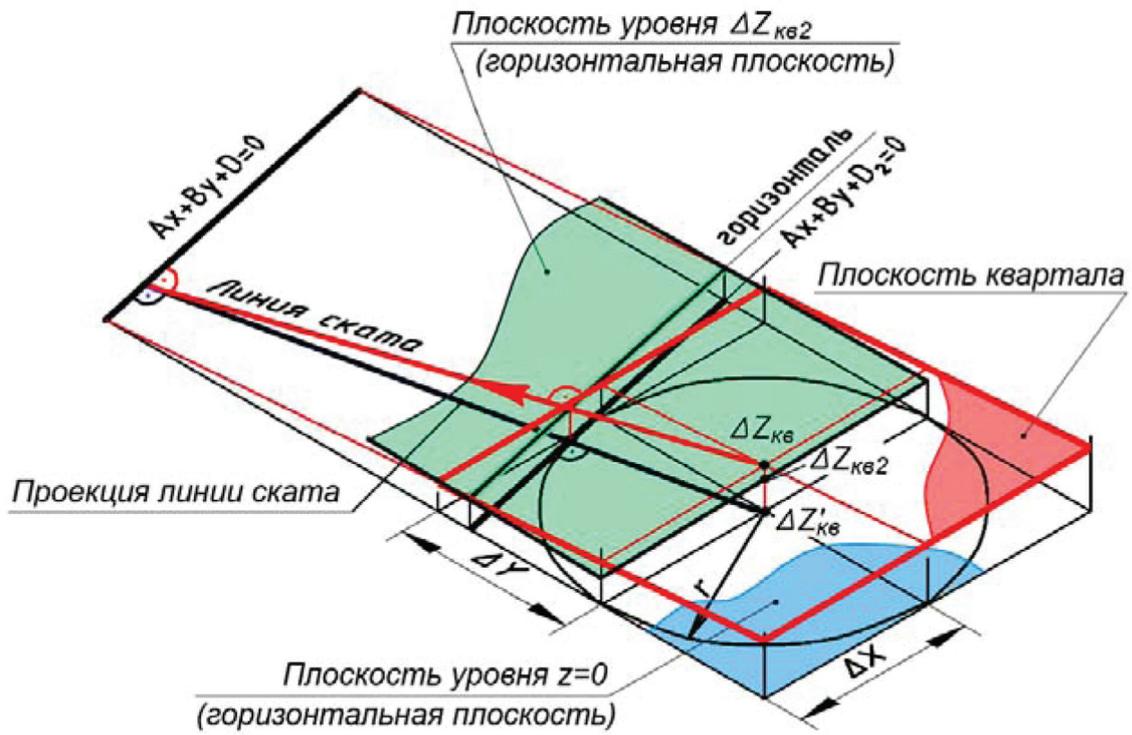


Рис. 6. Вывод горизонтали плоскости квартала в пределах границ

Fig. 6. Displaying the horizontal plane of the quarter within the boundaries

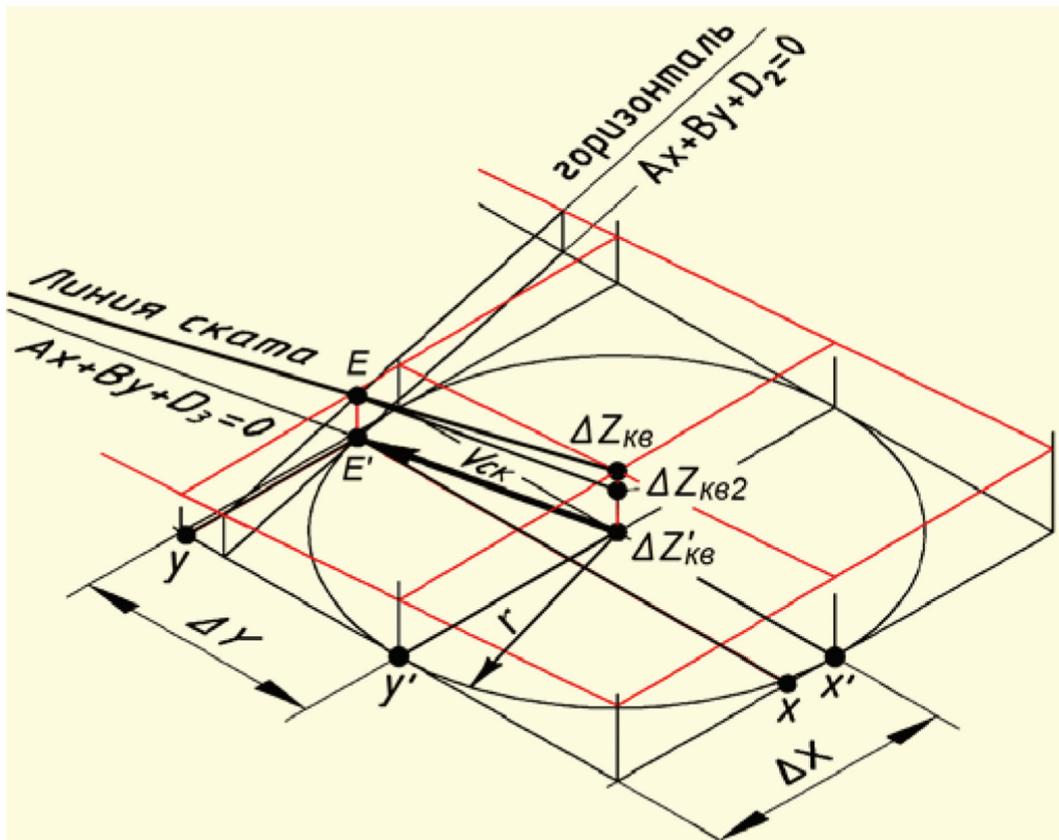


Рис. 7. Визуализация стрелки вектора ската в пределах границ квартала

Fig. 7. Visualization of the arrow of the slope vector within the boundaries of the quarter

$$V_{ск} \begin{cases} \Delta Z'_{кв} (\Delta X, \Delta Y) - \text{начало стрелки,} \\ E'(x, y) - \text{конец стрелки.} \end{cases} \quad (16)$$

Вышеизложенным методом определения плоскости квартала также была определена плоскость рельефа, проведенная по средним значениям строк и столбцов исходных данных. Плоскость рельефа способствует определению среднего уклона поверхности рельефа.

Определение количественных характеристик рельефа в виде коэффициента сложности является не менее важным. Оно способствует определению выпуклости или вогнутости рельефа относительно плоскости, для которой степень сложности выбирается равной нулю [8].

Определение коэффициента сложности основано на дифференцировании исходных данных квартала в виде матрицы 3×3.

Было установлено некоторое взаимоотношение между девятью членами матрицы методом конечных разностей:

1. Суммируем абсолютные значения разницы элементов строк и дифференцируем:

$$m = \frac{|(Z_{11} - 2Z_{12} + Z_{13})| + |(Z_{21} - 2Z_{22} + Z_{23})| + |(Z_{31} - 2Z_{32} + Z_{33})|}{\Delta X}, \quad (17)$$

где  $\Delta X$  – шаг прямоугольной регулярной сети вдоль строк.

2. Суммируем абсолютные значения разницы элементов столбцов и дифференцируем:

$$n = \frac{|(Z_{11} - 2Z_{21} + Z_{31})| + |(Z_{12} - 2Z_{22} + Z_{32})| + |(Z_{13} - 2Z_{23} + Z_{33})|}{\Delta Y}, \quad (18)$$

где  $\Delta Y$  – шаг прямоугольной регулярной сети вдоль столбцов.

3. Суммируем абсолютные значение разницы элементов диагонали и также дифференцируем:

$$d = \frac{|(Z_{11} - 2Z_{22} + Z_{33})| + |(Z_{13} - 2Z_{22} + Z_{31})|}{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}}. \quad (19)$$

Уравнения (17)-(19) суммируем и получим некоторое значение  $\zeta$  для квартала поверхности:

$$\zeta = m + n + d. \quad (20)$$

Уравнение (20) удовлетворяет определению степени сложности плоскости  $\zeta = 0$  и выдает различные значения, если рассматриваемая поверхность (квартал) не плоскость.

### Выводы

На основе вышеизложенного программа «Геоанализатор» производит визуализацию образования стока поверхностных вод по кварталам в режиме «Стрелки кварталов» и всей территории в режиме «Стрелка плоскости рельефа» (рис. 8), определение участков уклона в режиме «Картограммы уклонов» (рис. 9), а также степени расчлененности рельефа в режиме «Картограммы сложности» (рис. 10).

Режимы «Картограмма сложности» и «Картограмма уклонов» способствуют выбору границ заливки квадрантов картограммы по критериям, устанавливаемым пользователем. В произвольном выборе они принимают значения от минимального до максимальных.

В рис. 8, 9 и 10 выбраны произвольные данные рельефа для презентационных и учебных целей.

Программа «Геоанализатор» способствует предварительному анализу различных участков рельефа и выбору оптимальных решений среди множества вариантов проекта вертикальной планировки в задачах, связанных с водоотведением, и в задачах проведения оптимального маршрута дислокации с учетом расчлененности рельефа.

**Ключевые слова:** рельеф, квартал, поверхность квартала, линия среднего уклона, плоскость квартала, плоскость рельефа, линия ската, вектор ската, сложность рельефа.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Хаитов Б.У. Об одном геометрическом методе определения линии общего уклона плоской кривой // Молодой ученый : научный журнал. – Казань, 2015. – №10 (90). – С. 340-342.
2. Хаитов Б.У. Графо-аналитический метод определения линии общего уклона плоской кривой // Технические науки: теория и практика : мат-лы III Междунар. науч. конф., Чита, апрель 2016 г. – Казань : Изд-во «Молодой ученый», 2016 – С. 137-139.
3. Khaitov B. Graphic-analytical method of relief plane definition // Landscape architecture and regional planning. – 2016. – V. 1, Issue 1. – P. 13-17. – URL: <http://article.sciencepublishinggroup.com/html/10.11648.j.larp.20160101.12.html> (дата обращения: 16.12.2018).
4. Хаитов Б.У. Определение коэффициента сложности рельефа для задач инженерного проектирования // Интернаука : научный журнал. – М. : Интернаука. – 2018. – № 7 (41), часть 1. – С. 62-64.
5. Хейфец Б.С., Хромченко А.В. Применение теории информации для оценки степени расчлененности рельефа местности // Известия вузов. Геодезия и Аэрофотосъемка. – М., 1978. – № 4. – С. 13-23.

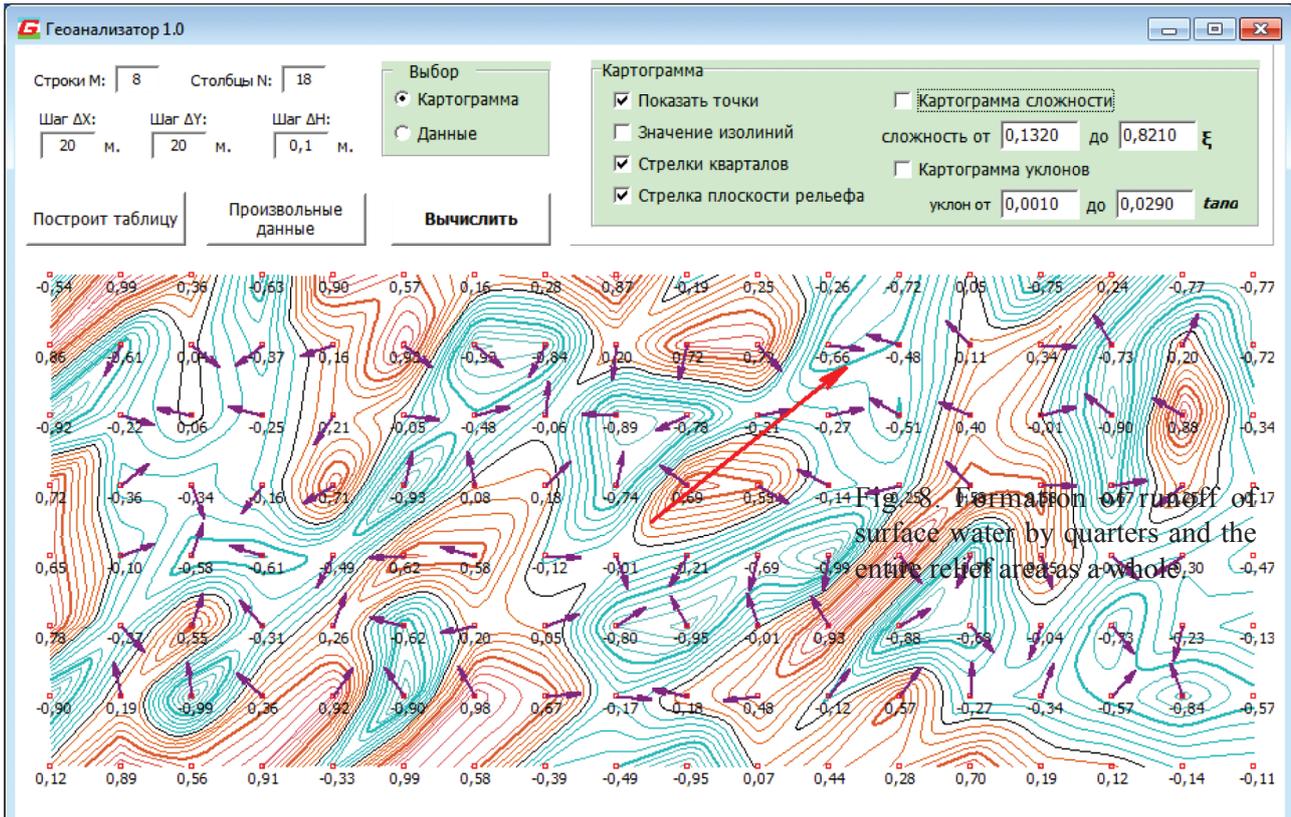


Рис. 8. Образование стока поверхностных вод по кварталам и всей территории рельефа в целом

Fig. 8. Formation of runoff of surface water by quarters and the entire relief area as a whole

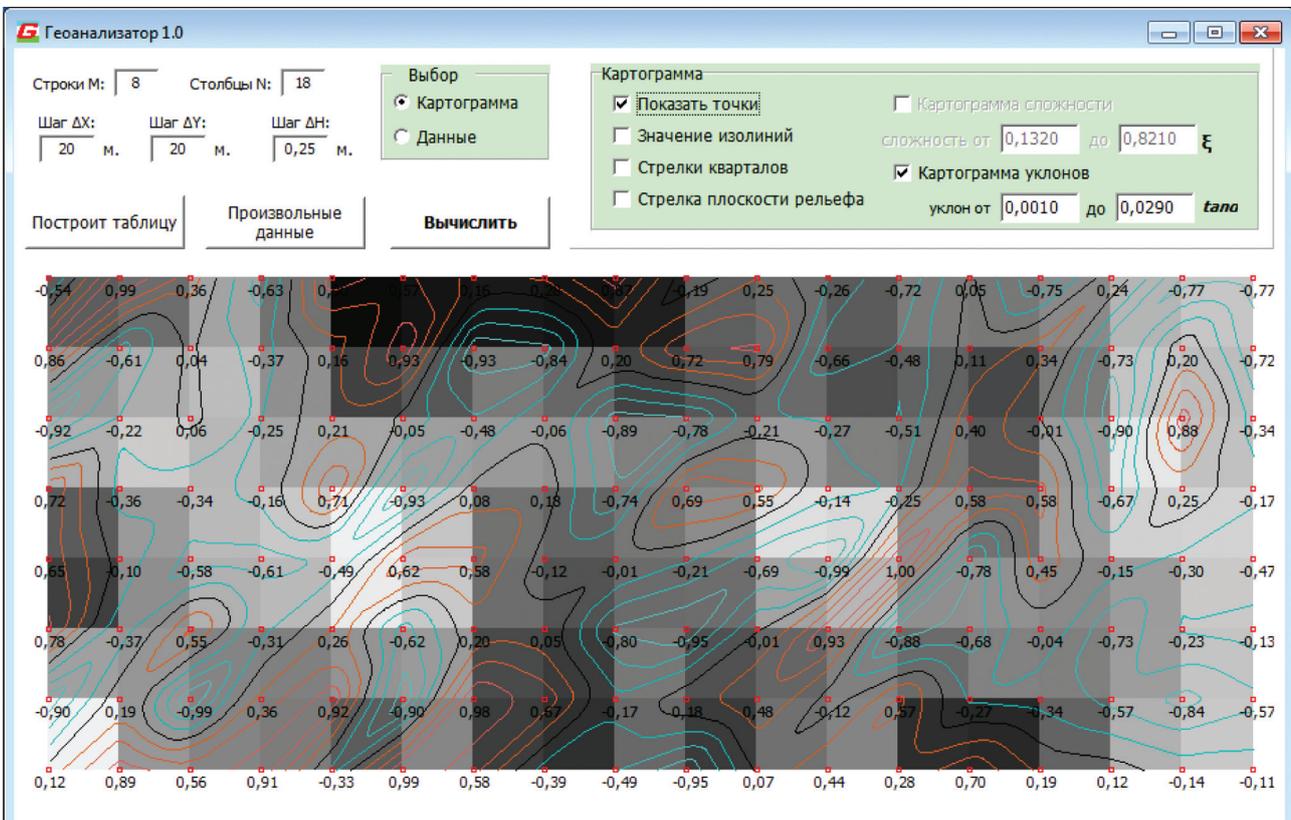


Рис. 9. Отображение картограммы уклонов

Fig. 9. Display of slope cartograms

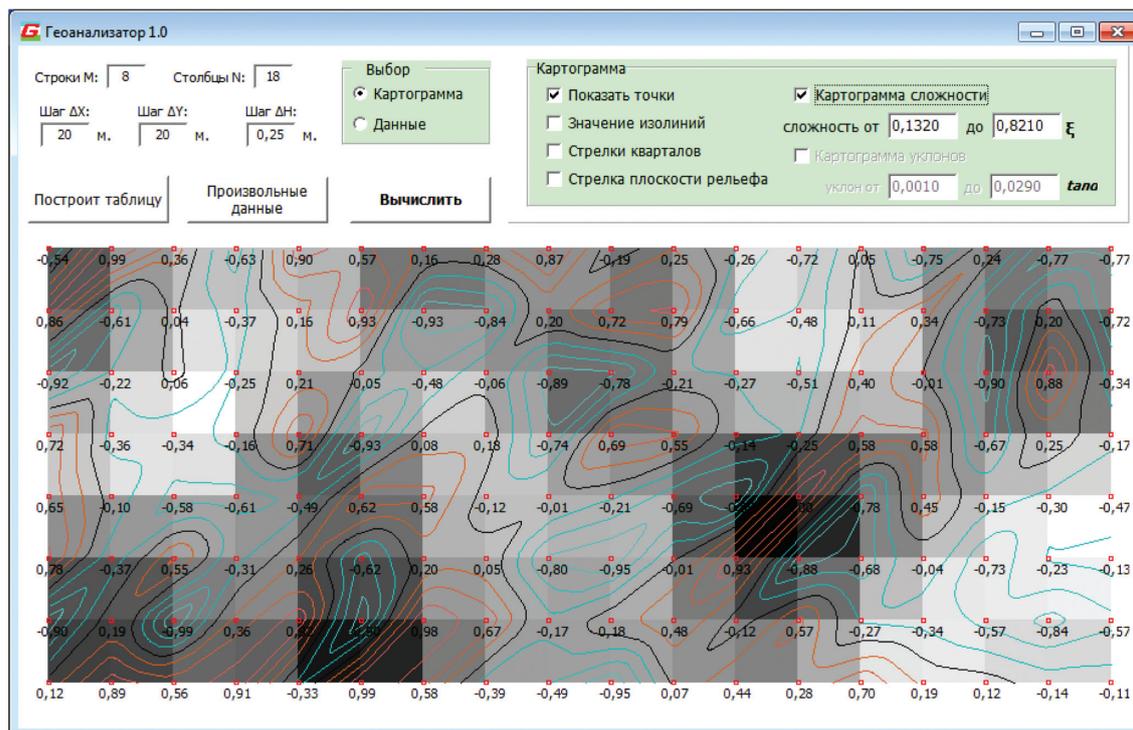


Рис. 10. Отображение картограммы сложностей

Fig. 10. Mapping of cartograms of difficulties

6. Хаитов Б.У. Цифровое моделирование рельефа для проектирования // Современные проблемы сельского и водного хозяйства : сб. трудов IX научно-практической конференции, Ташкент, ТИИМ, 20-21 мая 2010 г. – С. 17-19.

7. Триангуляция, работа с полигонами и другие алгоритмы (Triangle, polygons and ...) : сайт. – URL: <http://achawk.narod.ru/index.html#begin> ; Загрузка: [http://achawk.narod.ru/Download\\_Tri.html](http://achawk.narod.ru/Download_Tri.html) (дата обращения: 18.12.2018).

8. Кучкарова Д.Ф. Теория топографических поверхностей и ее приложения : дис. ... д-ра техн. наук. – Бухара, 2001. – 314 с.

REFERENCES

1. Khaitov B.U. On geometric method for determination of main slope of the plane curve // Young Scientist, 2015. No. 10 (90). P. 340-342.

2. Khaitov B.U. Graphic analytic method for determination main slope of the plane curve // Technical sciences: theory and practice : proc. III. Sci. conf. Kazan : Young Scientist, 2016. P. 137-139.

3. Khaitov B. Graphic-analytical method of relief plane definition // Landscape architecture and regional planning. 2016, V. 1, Issue 1. P. 13-17 (DOI: 10.11648/j.larp.20160101.12).

4. Khaitov B.U. Relief complexity coefficient determination in problems of constructional engineering // Internauka. 2018. No. 7-1 (41). P. 62-64.

5. Kheyfets B.S., Khromchenko A.V. Using information theory for assessment of dissection degree of terrain relief // Izvestiya vuzov. Geodezy and aerophotosurveying. 1978. No. 4. P. 13-23.

6. Khaitov B.U. Digital relief modeling for engineering // Current problems of agriculture and water industry : proc. IX Sci.-pract. conf. Tashkent : TIIM Publ., 2010. P. 17-19.

7. Triangulation, work with polygons and other algorithms (Triangle, polygons and ...). URL: <http://achawk.narod.ru/index.html#begin> Download: [http://achawk.narod.ru/Download\\_Tri.html](http://achawk.narod.ru/Download_Tri.html) (date of access: 18.12.2018).

8. Kuchkarova D.F. Topographic surface theory and its application : Dr. Eng. Sc. Dis. Bukhara : BukhSU Publ., 2001. 314 p.