

УДК 550.838

DOI: 10.47148/1609-364X-2020-3-20-28

© К.М. Ермохин, В.А.Солдатов

*К.М. Ермохин, В.А. Солдатов*

# ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ИСТОЧНИКОВ И ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРЫ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ НА ОСНОВЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ МЕТОДОМ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

## Введение

Задача определения реальных физических источников магнитного поля внутри Земли (МПЗ) давно находится в сфере внимания научного сообщества. Ее решение имеет как глобальное значение применительно к формированию климата, радиационной защиты, геологической истории, вулканической активности, так и прикладное – в вопросах металлогении, перспектив энергетики и т.д.

В вопросах определения нормального поля Земли в областях региональных аномалий и вблизи них важную роль играет определение положения и мощности природы их источников, изменяющихся во времени. Это позволит точнее и объективно выделять локальные аномалии на фоне региональных при поисках месторождений полезных ископаемых, что повысит точность геофизических прогнозов. Мониторинг положения и мощности региональных аномалий позволит на основе применения геоинформационных технологий увеличить, в частности, и эффективность геолого-геофизических работ.

«Таким образом, возникает целый ряд взаимосвязанных задач, решение которых требует использования методов системного анализа, геоинформатики и математической геофизики» [2]. Данная статья посвящена в основном третьему аспекту.

Существует множество гипотез и теорий происхождения МПЗ, достаточно подробно описанных, например, в обзоре моделей геодинамики [7 или 10]. Для их подтверждения или опровержения необходимо достоверное знание о местоположении и мощности источников этого поля. Наличие центрального диполя как математического объекта сомнений не вызывает, поскольку в любой равновесной системе есть центр масс, а вот существование его физического источника может вызывать сомнение. Есть и альтернативные точки зрения – например, разделение зарядов внутри Земли за счет тепловых потоков между внутренним и внешним ядром и ее

вращения, что, в частности, подразумевает подобную цилиндрической форму центрального дипольного источника МПЗ [5].

Мы не можем отдать предпочтение ни одной из теорий генерации МПЗ, т.к. не занимались непосредственно этой проблемой, но выбор между ними нам представляется затруднительным без знания структуры внутреннего поля.

Серьезное исследование в данном направлении было сделано в работе [6]. В ней приведен метод аппроксимации глобального магнитного поля Земли 15 дипольными источниками. Это действительно исчерпывает вопрос аппроксимации МПЗ на поверхности планеты, но не отвечает на вопрос о его реальных источниках, поскольку:

1. Математические диполи (нулевой длины), использованные для подбора поля, суть не реальные объекты. Это абстрактные сущности, отражающие общую структуру поля, но не реальности. В действительности магнитные объекты внутри Земли имеют крупные размеры, и их полюсы, наиболее вероятно, разнесены на значительные расстояния, о чем свидетельствуют многочисленные наземные и космические измерения МПЗ.
2. Способ подбора диполей на основе последовательного исключения максимальных предполагаемых источников МПЗ, во-первых, неоднозначен, а во-вторых, некорректен ввиду того, что поля отдельных диполей не являются ортогональными функциями на поверхности Земли и результат интерактивного подбора зависит от выбранной достаточно произвольно последовательности действий.
3. Существенная нелинейность задачи не дает возможности ее общего однозначного решения. Неопределенность положения во внутреннем пространстве источников поля и их ориентации создают катастрофическую

неоднозначность результатов расчета на основе нелинейных алгоритмов ввиду сложности поверхности отклика при минимизации целевого функционала.

Автор сам указал на эти недостатки и предложил поискать альтернативу.

В данной статье предпринята попытка предложить новое решение данной проблемы в 3D-варианте как для модельных, так и реальных данных на базе опробованного на теоретических и практических примерах применения 2D-метода аналитического продолжения геофизических полей через магнитные массы [3, 4].

**Математическая постановка задачи**

Классическое представление модели МПЗ было сформулировано К. Гауссом в виде ряда по полиномам Лежандра [9]:

$$U(r, \theta, \lambda) = R_E \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R_E}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos(m\lambda) + h_n^m \sin(m\lambda)) P_n^m(\cos(\theta)), \quad (1)$$

где  $U(r, \theta, \lambda)$  – потенциал магнитного поля,  $r$  – расстояние от центра Земли,  $\theta$  – широта (отсчитываемая от северного полюса),  $\lambda$  – долгота от Гринвичского меридиана,  $R_E$  – радиус Земли,  $P_n^m(\cos(\theta))$  – присоединенные функции Лежандра,  $g_n^m, h_n^m$  – коэффициенты. То, что потенциал реально неизмерим, не означает, что это представление эфемерно. По измерениям трех компонент вектора магнитного поля возможно не только определение  $g_n^m, h_n^m$ , но и разделение МПЗ на внутреннюю и внешнюю части.

Это представление обеспечивает надежную аппроксимацию МПЗ по данным обсерваторских наблюдений и спутниковых измерений. Сферические гармонические коэффициенты для полной геомагнитной модели IGRF (международная аналитическая модель среднего глобального магнитного поля Земли, учитывающая его вековую вариацию), использованные в данной работе, общедоступны в [13].

На поверхности Земли и выше (при  $r \geq R_E$ ) ряд (1) сходится, но при  $r < R_E$  это не очевидно.

**Базовое решение**

Рассмотрим в качестве первого приближения упрощенную модель МПЗ – осесимметричную (что не соответствует реальности, но для дальнейшего исследования существенно).

Для упрощения формул примем, что Земля имеет форму шара (это имеет место с достаточно высокой степенью точности) и  $R_E$  положим равным 1.

Потенциал единичного точечного источника, находящегося на оси SN шара (рис. 1) в точке

с координатой  $z$  по оси ON на удалении  $r$  от центра O (точка P) [8],

$$U(r, z) = 1 / \sqrt{r^2 - 2rz \cos(\theta) + z^2},$$

где N – северный полюс, S – южный, O – центр, ось  $z$  – по радиусу ON (рис. 1).

В качестве простейшей осесимметричной модели расположим две магнитные массы равной величины  $m$  разного знака в точках  $z_1 = 0,6R_E$  (положительная) и  $z_2 = 0,4R_E$  (отрицательная) на оси ON, координату вдоль которой назовем  $z$  (рис. 1).

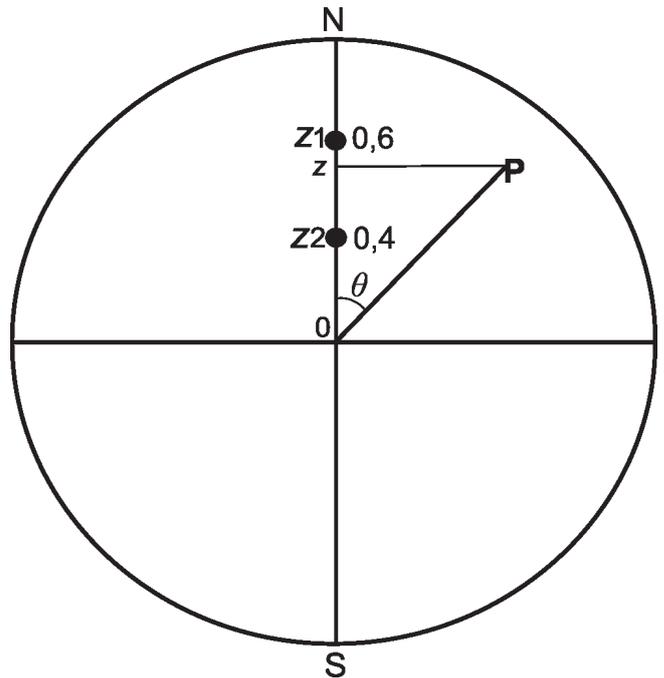


Рис. 1. Обозначения переменных осесимметричной модели

Fig. 1. Designation of variables of axisymmetric model

При  $\cos(\theta) = 1$  (на радиусе шара ON) для источника, находящегося в точке  $z$ , получаем:

$$U(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z}{r} \right)^n.$$

Для двух одинаковых магнитных зарядов ( $+m$  и  $-m$ ) с разными знаками в точках на оси  $z$   $z_1$  и  $z_2$  ( $z_1 > z_2$ ) имеем, соответственно:

$$U_d(r, z_1, z_2) = m \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z_1}{r} \right)^n - m \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z_2}{r} \right)^n = m \left( \frac{r}{r - z_1} - \frac{r}{r - z_2} \right). \quad (2)$$

Суммы рядов чисто формальны. На самом деле в области  $r > z_1$  оба ряда в формуле (2) сходятся, при  $r < z_2$  – расходятся, при  $z_2 < r < z_1$  – один ряд

сходится, а другой расходится. На поверхности шара имеем ряд:

$$U_d(\theta, z1, z2) = m \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\cos(\theta))(z1^n - z2^n). \quad (3)$$

Для конкретной модели возьмем физический диполь с единичным моментом. Один его полюс расположим в точке  $z2 = 0,4$ , другой в точке  $z1 = 0,6$  (рис. 1) с магнитными зарядами  $m = \pm 5$  у.е. Условные единицы в модельных примерах для того, чтобы не загромождать выкладки физическими константами, но при этом прояснить сущность предлагаемого подхода.

При достаточном количестве значений потенциала  $U_d(\theta)$  на поверхности шара для различных значений угла  $\theta$  однозначно определяются неизвестные множители  $m(z1^n - z2^n)$  путем интегрирования (имея в виду ортогональность полиномов Лежандра с весом 1 на отрезке  $[-1, 1]$ ). Обозначим  $\cos(\theta) = x$ , тогда

$$m(z1^n - z2^n) = \int_{-1}^1 U_d(x) P_n(x) dx. \quad (3^*)$$

Таким образом, мы теоретически в состоянии определить местоположение источников поля, а затем и их величину.

Для данного модельного примера можно определить  $z1$ ,  $z2$  и  $m$  чисто алгебраически, но в реальности мы не знаем количества источников (кроме того, что оно четно), поэтому это не путь решения проблемы.

Следует отметить, что расчет поля с помощью ряда (1) возможен только до точки  $z1$  (ближайшей к поверхности). Это демонстрирует ряд (2). Глубже наблюдается расходимость ряда и результаты, соответственно, будут заведомо неверными. Это означает, что расчет потенциала или поля с помощью ряда позволяет определить верхнюю границу магнитоактивной поверхности, но глубже – нет. При этом значения поля, рассчитанные методом суммирования ряда Гаусса-Лежандра и с помощью цепной дроби Вискватова (описанной ниже) совпадают, а их расхождение означает встречу с особой точкой поля.

Переходя к конкретному определению положения источников и их величины применим метод преобразования степенного ряда в цепную дробь [11, 3].

Основы этой теории были заложены еще Евклидом, затем развивались Ньютоном, Эйлером, Чебышевым, Принсгеймом, Марковым, Рутихаузером, Троном, Хованским, Гончаром и др. Но особую роль сыграл академик Санкт-Петербургской Императорской академии наук В.И. Вискватов [11]. Ему удалось разработать уникальный простой универсальный алгоритм, который позволяет суммировать расходящийся ряд, соответствующий искомой

функции, даже при наличии особых точек (полюсов), т.е. осуществить аналитическое мероморфное (с наличием полюсов) продолжение функции.

Это не всегда приводит к воспроизведению самой функции, но позволяет достоверно определить ее особые точки, т.е. ее индикатрису, которая, согласно [1] есть «линия или поверхность, наглядно характеризующая какое-нибудь свойство изучаемого объекта» (в данном случае отражает особенности потенциала или поля на заданной оси ON).

Результат аналитического продолжения ряда (3) с поверхности сферы в центр по оси ON (на основе ряда (1)) приведен на рис. 2. Однозначно определяется положение полюсов, но знак зарядов не соответствует реальности, поэтому приведенная кривая является индикатрисой, а не собственно полем.

Рис. 2 наглядно демонстрирует совпадение радиальной составляющей магнитного поля, рассчитанной по алгоритму аналитического продолжения, с индикатрисой этого поля, поскольку положение полюсов (источников) 0,4 и 0,6 определено, но знак заряда в точке 0,4 – обратный. Для пояснения

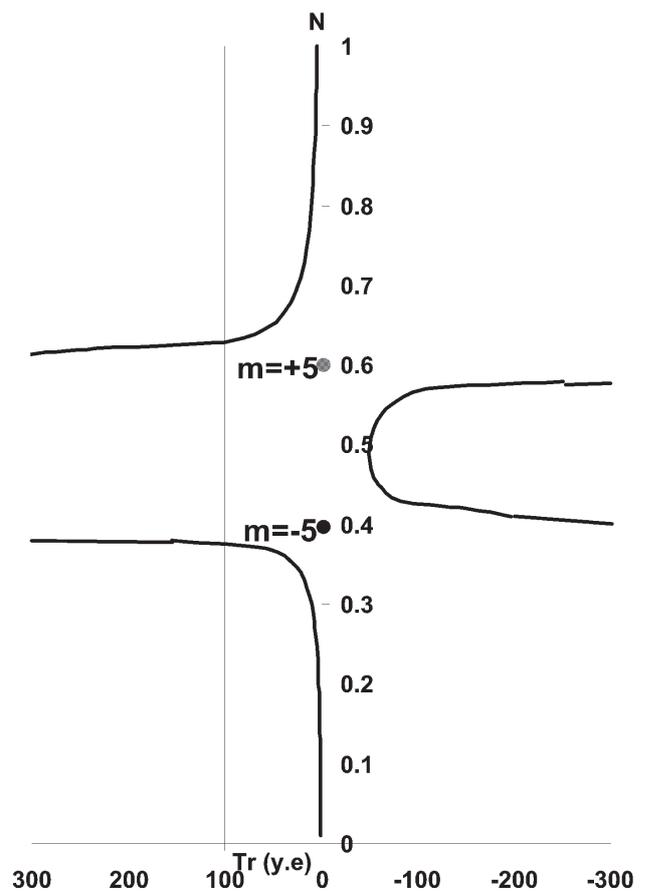


Рис. 2. График аналитического продолжения дроби Вискватова радиальной составляющей поля вдоль радиуса ON

Fig. 2. Graph of analytical continuation by Viskovatov fraction

работы алгоритма В.И. Висковатова, предложенного им в 1805 г., приведем формулы преобразований, которые позволяют по заданным коэффициентам степенного ряда построить последовательность коэффициентов соответствующей цепной дроби. Опишем этот алгоритм в авторском варианте с небольшими упрощающими изменениями и заменой архаичных обозначений.

Пусть исходная функция задана степенным рядом по переменной  $x$ , тогда:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 1 + c_{11}x + c_{12}x^2 + c_{13}x^3 \dots = \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + c_{11}x + c_{12}x^2 + c_{13}x^3 \dots} - 1} = \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{-c_{11}x - c_{12}x^2 - c_{13}x^3 \dots}{1 + c_{11}x + c_{12}x^2 + c_{13}x^3 \dots}} = \\
 &= \frac{1}{1 - c_{11}x \frac{1 + c_{12}x + c_{13}x^2 + c_{14}x^3 \dots}{1 + c_{11}x + c_{12}x^2 + c_{13}x^3 \dots}} = \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{c_{11}x}{1 + \frac{1 + c_{11}x + c_{12}x^2 + c_{13}x^3 \dots}{1 + c_{12}x + c_{13}x^2 + c_{14}x^3 \dots}} - 1} = \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{c_{11}x}{1 + \frac{(c_{11} - c_{12})x + (c_{12} - c_{13})x^2 + (c_{13} - c_{14})x^3 \dots}{1 + c_{12}x + c_{13}x^2 + c_{14}x^3 \dots}}} = \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{c_{11}x}{1 + (c_{11} - c_{12})x \frac{(c_{12} - c_{13})x + (c_{13} - c_{14})x^2 + (c_{14} - c_{15})x^3 \dots}{1 + c_{12}x + c_{13}x^2 + c_{14}x^3 \dots}}} = \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{c_{11}x}{1 + c_{21}x \frac{1 + c_{31}x + c_{32}x^2 + c_{33}x^3 \dots}{1 + c_{12}x + c_{13}x^2 + c_{14}x^3 \dots}}} = \dots \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{c_{11}x}{1 + \frac{c_{21}x}{1 + \frac{1 + c_{12}x + c_{13}x^2 + c_{14}x^3 \dots}{1 + c_{31}x + c_{32}x^2 + c_{33}x^3 \dots}} - 1}}
 \end{aligned}$$

=[если  $(c_{11} - c_{12}) \neq 0$ ]

$$\dots = \frac{1}{1 - \frac{c_{11}x}{1 + \frac{c_{21}x}{1 + \frac{c_{31}x}{\dots}}}}$$

Если  $c_{11} - c_{12} = 0$ , за дробь выносятся не  $c_{21}x = (c_{11} - c_{12})x$ , а  $c_{k_1}x^{k_1} = (c_{1k_1} - c_{1k_1+1})x^{k_1}$ , где  $k_1$  – первый номер, для которого выполняется  $c_{k_1} = (c_{1k_1} - c_{1k_1+1}) \neq 0$ . Аналогично поступаем, когда при дальнейших вычислениях получается  $c_{j_1} - c_{j_2} = 0$ .

Таким образом, для МПЗ (ввиду отсутствия нулевого члена в ряде Гаусса-Лежандра и доминировании первого) мы получаем цепную дробь общего вида [3]:

$$f(x) = \frac{a_1x}{1 + \frac{a_2x^{k_2}}{1 + \frac{a_3x^{k_3}}{1 + \frac{a_4x^{k_4}}{\dots}}}}} \quad (4)$$

где все  $a_k \neq 0$ ,  $k_i \geq 1$ ,  $k_i \geq 1$  – целые.

На первый взгляд кажется, что приведенные формулы – тавтология, но на самом деле это реальный способ альтернативного представления функции. Как свет является волной и частицей (корпускулой) одновременно, так и аналитическая функция представляется рядом и цепной дробью одновременно.

Роль переменной  $x$  в нашем случае играет  $1/r$ . Описанный выше алгоритм позволяет построить цепную дробь, соответствующую ряду, т.е. не гармоническую, а мероморфную функцию с особенностями в полюсах измеренной функции (что невозможно с помощью суммирования ряда, а тем более его конечного отрезка, которым мы реально располагаем) и определить их местоположение, что является основной целью.

Напомним, что коэффициенты ряда Гаусса-Лежандра определяются по значениям потенциала или поля на поверхности шара вне зависимости от конкретной априорной модели, а коэффициенты цепной дроби вычисляются именно по ним.

Определив таким образом координаты источников поля и решив методом наименьших квадратов простую линейную систему относительно величины этих источников (поскольку их положение определено), получаем картину распределения потенциала для нашей конкретной модели (рис. 3).

Рис. 3 представляет значения магнитного потенциала, измеренного на поверхности сферы после определения положения источников на рис. 1 посредством цепной дроби, с последующим расчетом его внутри сферы на основе метода наименьших квадратов.

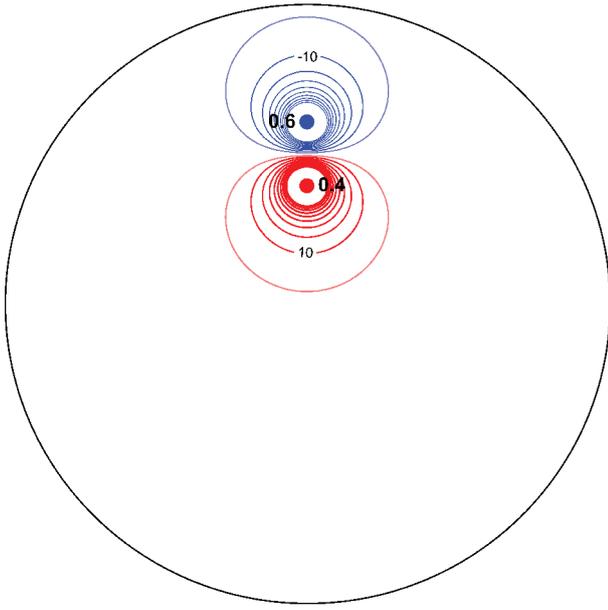


Рис. 3. Изолинии потенциала магнитного поля физического диполя (в у.е.) для осесимметричной задачи (синие-отрицательные, красные-положительные)

Fig. 3. Contours of the magnetic field potential of a physical dipole (in cu) for asymmetric problem (blue-negative, red-positive)

Особое внимание к осесимметричной модели как к базовой объясняется следующим: в точке N (северный полюс) присоединенные функции Лежандра все равны нулю, а сами полиномы Лежандра равны единице. Так что ряд (1) в точке полюса N превращается в простой степенной ряд по степеням  $1/r$  по оси ON:

$$U(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{r^n}$$

Точка полюса N с математической точки зрения является условной, и мы вправе перенести ее в любое место на поверхности шара. Это позволяет свести общую задачу определения источников магнитного поля в Земле к осесимметричной.

Эта процедура нуждается в пояснении. Проинтегрируем ряд (1) по  $\lambda$  от  $-\pi$  до  $\pi$  при фиксированной широте  $\theta$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} U(r, \theta, \lambda) d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} R_E \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_E}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos(m\lambda) + h_n^m \sin(m\lambda)) P_n^m(\cos(\theta)) d\lambda$$

Для получения значений искомых интегралов разобьем параллели, соответствующие различным широтам  $\theta$  на  $m$  равных частей по  $\lambda$  и применим квадратурные формулы достаточно высокого порядка. Мы выбрали пятиточечную формулу Боде:

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x) dx = \frac{2h}{45} (7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4),$$

имеющую погрешность расчета порядка  $O(h^7)$ . При этом выбирается  $m = 4k$  ( $k$ -целое).

Все члены с синусами и косинусами обращаются в нуль. Остается ряд:

$$U^s(r, \theta) = R_E \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_E}{r}\right)^n c_n P_n(\cos(\theta)) = \int_{-\pi}^{\pi} U(r, \theta, \lambda) d\lambda$$

Проделав это при достаточном количестве значений (так, чтобы сетка по  $\cos(\theta_k)$  была равномерной), мы получаем возможность определить неизвестные коэффициенты  $c_n$  с помощью интегрирования по  $\cos(\theta) = x$  (опять же, имея в виду ортогональность полиномов Лежандра с весом 1 на отрезке  $[-1, 1]$ , см. (3\*)). Фактически это позволяет выделить из полного поля осесимметричную (относительно оси ON) его часть.

Таким образом, имея значения потенциала на равномерной расчетной сетке по  $(\cos(\theta), \lambda)$  с плюсом N, мы сводим задачу к осесимметричной. А поскольку  $P_n(\cos(0)) = 1$  (на полюсе), то ряд (1\*) (при принятом ранее  $R_E = 1$ ) преобразуется в ряд

$$U^s(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} c_n$$

Коэффициенты  $c_n$  определяются, как описано выше, для осесимметричного случая.

Базовое решение является по существу 1D-моделью, но дает ключ к переходу к 3D-решению.

### Общее решение

Перенеся полюс в точку  $N^*$ , с помощью поворота базовой сетки получаем новые значения коэффициентов  $c_n^*$  для определения индикатрисы потенциала на оси  $ON^*$  (рис. 4).

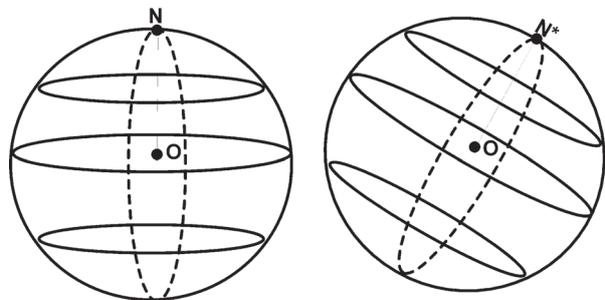


Рис. 4 Поворот сетки интегрирования при переносе полюса из N в N\*

Fig. 4. Rotation of the integration grid when moving the pole from N to N\*

Перевод полюса  $N = (0,0)$  в  $N^* = (\theta^*, \lambda^*)$  производится по формулам:

$$\theta' = \theta - \theta^* \quad \lambda' = \lambda - \lambda^*.$$

Чтобы использовать этот алгоритм для расчета величин на произвольной оси, мы предварительно поворачиваем систему координат таким образом, чтобы ось новой системы смотрела из центра в заданную точку.

Рассмотрим теперь конкретную несимметричную модель, полюсы которой расположены в точках  $0,6(+5)$ ;  $0,4(-5)$ ;  $0,1(50)$ ;  $-0,1(-0)$  на оси ON и в точках  $0,6(-5)$ ;  $0,8(+5)$  на оси OE (в скобках – магнитный заряд в у.е.). Мощность источников и их расположение поясняет рис. 5 (радиус Земли – 1).

Рис. 6 показывает, что магнитные массы на оси не экранируют друг друга, что было ранее показано для случая 2D в работе [2].

Рис. 7 показывает, что полюсы выделяют положение магнитных масс на оси OE. При этом в точке O проявляется асимметрия поля по оси SN.

Возможность вычисления потенциала и поля в базовой системе координат для практических расчетов обеспечена математической моделью магнитного поля Земли IGRF-2000.

Наши вычисления проводились с коэффициентами IGRF для 2000 г., поскольку для определения принципиального подхода к решению задачи это значения не имеет. Расчеты произведены с шагом по осям 0,01. Пересчет коэффициентов ряда Лежандра-Гаусса делался с использованием библиотеки программ сферического анализа, предназначенной для геоинформационного исследования планетарных моделей геофизических полей SHTools [12].

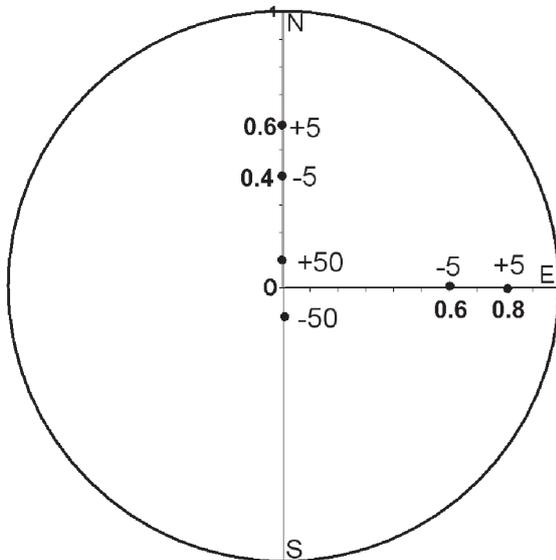


Рис. 5. Несимметричная модель источников магнитного поля

Fig. 5. Asymmetric model of magnetic field sources

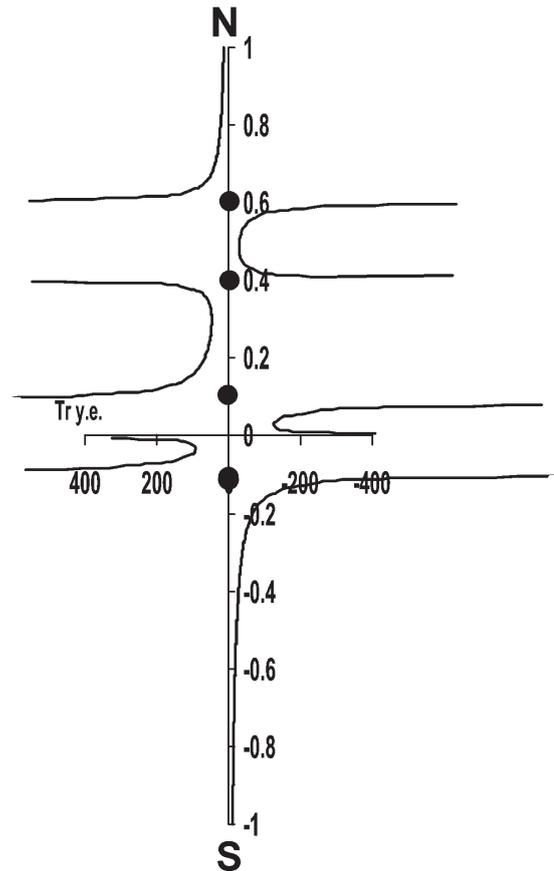


Рис. 6. Аналитическое продолжение радиальной составляющей поля  $Tr$  по оси SN несимметричной модели

Fig. 6. Analytical continuation of the radial component of the field  $Tr$  along the SN axis of the asymmetric model

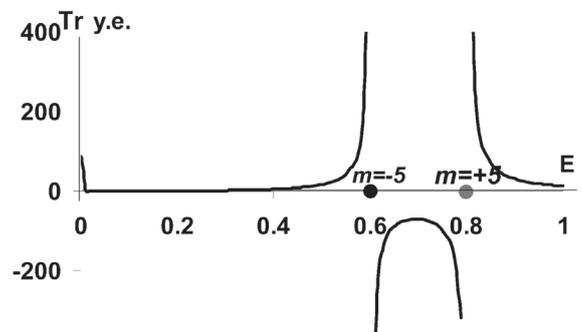


Рис. 7. Аналитическое продолжение радиальной составляющей поля  $Tr$  по экваториальной оси OE несимметричной модели

Fig. 7. Analytical continuation of the radial component of the field  $Tr$  along the equatorial axis of the OE asymmetric model

Переходя к реальному МПЗ, мы имеем следующую картину [12] (рис. 8).

По модели IGRF был проведен расчет модуля напряженности магнитного поля по сетке  $1 \times 1$  градус и определены его региональные максимумы.

Мы выбрали для расчета две региональные аномалии в северном полушарии и одну – в южном: первая – в Восточной Сибири (В, 61365 нТ), вторая – в Канаде (С, 60018 нТ) и третья – в области Антарктики (А, 66824 нТ). Координаты этих точек (долгота-широта, в градусах)  $138^\circ$  в.д.  $60^\circ$  ю.ш. (А),  $105^\circ$  в.д.  $61^\circ$  с.ш. (В),  $99^\circ$ з.д.  $59^\circ$  с.ш. (С) соответственно.

Увеличить это количество на 2-3 точки можно (например, точками Бразильской и Австралийской региональной аномалии), но это не даст полного решения проблемы. Цель данной работы – только показать возможный реальный путь ее решения, а не окончательный результат.

Как отмечено выше, расчет поля (или потенциала) с помощью ряда Гаусса-Лежандра возможен только до ближайшей к поверхности особой точки, глубже этот ряд расходится. Но до этого момента значения ряда (1) и цепной дроби (4) практически совпадают. На рис. 9 представлен расчет радиальной составляющей поля как наиболее наглядной характеристики положения источников.

Для представления результатов расчета (поскольку в данных есть отрицательные значения) используем специфическую логарифмическую шкалу:

$$LG(f(R)) := \lg(1 + |f(R)|) \text{sign}(f(R)) \text{ (рис. 9)}$$

### Обсуждение

В точке 0,13 (глубина ~5500 км) определяется магнитная граница на всех трех радиусах. Причем знак при подходе с севера и с юга – противоположный, что подтверждает наличие центрального магнитного диполя Земли как физической реальности, т.к. не может быть следствием погрешностей расчета ввиду достаточной удаленности от центра.

Точка отрыва значений цепной дроби от ряда Гаусса-Лежандра ( $R = 0,25$ ) на глубине ~4800 км свидетельствует или о недостаточности информации (всего 13 коэффициентов в модели IGRF-2000), или об объективной расходимости ряда (1). Но близость значений ряда и цепной дроби говорит о возможности расчетов непосредственно по ряду (1) по радиусам А, В, С до глубин порядка 4800 км, но глубже – цепной дробью.

На рисунке видна аномальная область поля при  $0,5R$ , где значения ряда и цепной дроби совпадают, но особенности поля (полюса) нет (глубина ~3200 км). Причем на южном полюсе (А) эта зона более мощная, что свидетельствует о существенной асимметрии глубинных источников МПЗ. На радиусах В и С эти аномалии практически идентичны. Возможно, это говорит о том, что эти аномалии индуцированы центральным магнитным диполем и не являются самостоятельным генератором МПЗ, но отражаются в результатах измерения поля на поверхности Земли. Однако самостоятельного влияния мантийных плюмов на формирование крупных региональных аномалий исключать нельзя.

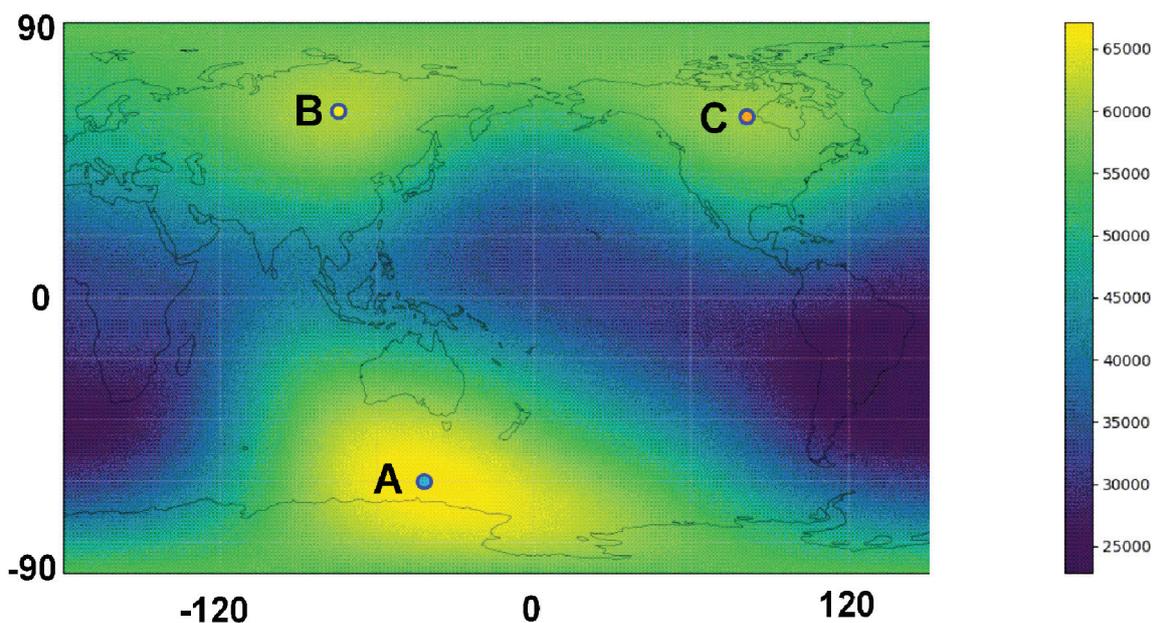


Рис. 8. Модуль напряженности магнитного поля Земли T (нТ)

Fig. 8. The module of the Earth's magnetic field T (nT)

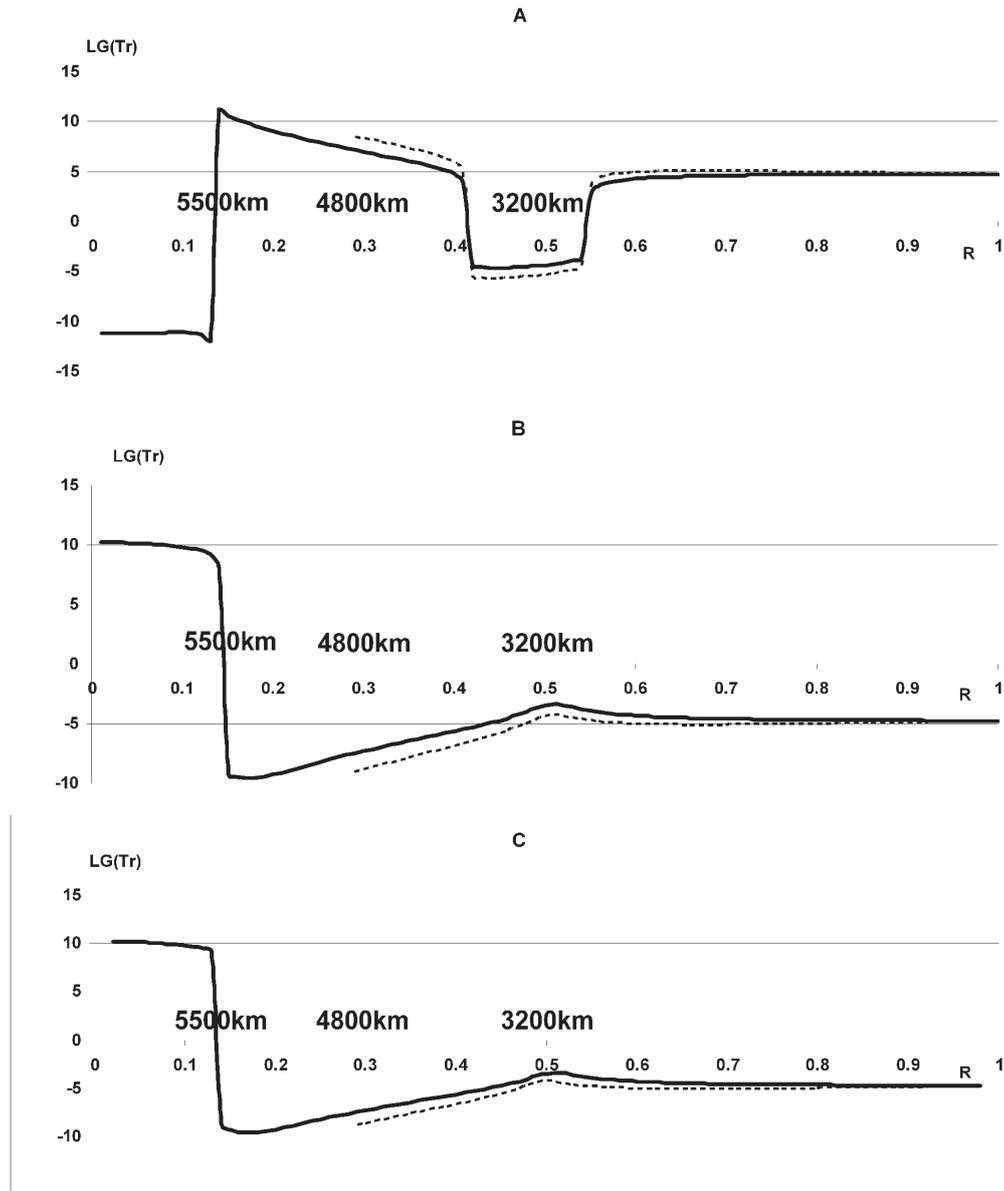


Рис. 9. Ряд Гаусса-Лежандра радиальной составляющей поля  $T_r$  (пунктир) и его аналитическое продолжение цепной дробью вдоль радиусов от центра Земли в точки А, В, С

Fig. 9. Gauss-Legendre series of the radial component of the field  $T_r$  (dotted line) and its analytical continuation by a continued fraction along radius from the center of the Earth to points A, B, C

Эти выводы относятся к изученным радиусам ОА, ОВ, ОС. При исследовании большого количества радиусов, возможно, появятся корректировки.

### Заключение

Задачей данного исследования являлся поиск реального способа определения источников МПЗ, который бы опирался только на объективные данные модели IGRF, а не на приблизительные оценки и гипотетические модели строения источников генерации МПЗ, что показано на примере трех региональных аномалий (Антарктической, Восточно-Сибирской и Канадской). Представленный метод

теоретически может дать единственное решение (в математическом смысле) задачи определения строения магнитного поля внутри Земли без предварительных предположений (что основано на теореме Коши-Ковалевской и теории цепных дробей).

Построение же полной 3D-картины источников МПЗ требует детального расчета по множеству радиусов, с шагом по поверхности Земли, как минимум, в один градус, что пока затруднительно в плане вычислений, анализа результатов расчета и их наглядного представления, поэтому отложено нами на будущее. Без детального расчета невозможно построение общей картины магнитного поля внутри

Земли, а главное – определение всех его реальных 3D-источников (что необходимо). Для полного определения источников МПЗ предлагается сначала вычисление их положения на основе аналитического продолжения поля с поверхности внутрь Земли по множеству радиусов, затем определение величины этих источников методом наименьших квадратов и последующего вычисления внутреннего МПЗ. Это один из альтернативных путей решения поставленной задачи, который при современном уровне развития вычислительной техники вполне осуществим.

**Ключевые слова:** модель IGRF, аналитическое продолжение, цепные дроби, сферический анализ, региональные аномалии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Большая советская энциклопедия : в 30 т. / глав. ред. А.М. Прохоров. – 3-е изд. – М. : Сов. энциклопедия, 1969-1978. Т. 10: Ива-Италики. – 1972. – 591 с. – С. 199.
2. Гвишиани А.Д., Лукьянова Р.Ю. Геоинформатика и наблюдения магнитного поля Земли: Российский сегмент // Физика Земли. – 2015. – № 2. – С. 3-20.
3. Ермохин К.М. Аналитическое продолжение гравимагнитных полей через массы // Доклады АН. – 2017. – Т. 476. – С. 104-107.
4. Ермохин К.М. Технология построения разрезов методом аналитического продолжения геофизических полей // Геоинформатика. – 2010. – № 2. – С. 51-60.
5. Кузнецов В.В. Физика Земли : учебник-монография [Электронный ресурс]. – Новосибирск, 2011. – URL: <http://www.geokniga.org/inboxes/5226> (дата обращения: 12.02.2020).
6. Ладынин А.В. Дипольные источники главного геомагнитного поля // Геология и геофизика. – 2014. – Т. 55, № 4. – С. 634-649.
7. Соколов Д.Д. Геодинамо и модели генерации магнитного поля (обзор) // Геомагнетизм и Аэронавигация. – 2004. – Т. 44, № 5. – С. 579-589.
8. Суэтин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М. : Наука, 1979. – 415 с.
9. Яновский Б.М. Земной магнетизм. – Л. : Изд-во Ленинградского ун-та, 1978. – 591 с.
10. Pétrélis F. Simple Mechanism for Reversals of Earth's Magnetic Field / F. Pétrélis, S. Fauve, E. Dormy and J-P. Valet // Physical Review Letters. – 2009. – V. 102.
11. Viskovatov B. De la methode generale pour reduire toutes sortes des quantitees en fraction continues // Memoires de l'Academie Imperiale des Sciences de St. Petersburg. – 1805. – No. 1. – P. 226-247.
12. Wiczorek M.A., Meschede M. SHTools: Tools for working with spherical harmonics // Geochemistry, Geophysics, Geosystems. – 2018. – 19. – P. 2574-2592. – Doi: 10.1029/2018GC007529
13. International Geomagnetic Reference Field [Electronic resource] // IAGA Division V-MOD: Geomagnetic Field Modeling. – URL: <http://www.ngdc.noaa.gov/IAGA/vmod/igrf.html> (date of access: 16.02.2020).

#### REFERENCES

1. Great Soviet Encyclopedia. Moscow, 1969-1978.
2. Gvishiani, A.D., Lukianova, R.Y. Geoinformatics and observations of the Earth's magnetic field: The Russian segment // Izvestiya, Physics of the Solid Earth. 2015. V. 51, Issue 2. P. 157-175. URL: <https://doi.org/10.1134/S1069351315020044> (date of access: 12.02.2020).
3. Ermokhin K.M. Analytical continuation of gravimagnetic fields through masses // Dokl. Earth Sciences. 2017. V. 476, Issue 1. P. 1054-1057.
4. Ermokhin K.M. Technology of cut construction by the geophysical fields analytical continuation method // Geoinformatica. 2010. No. 2. P. 51-60.
5. Kuznetsov V.V. Physics of the Earth : textbook-monograph [Electronic resource]. – Novosibirsk, 2011. URL: <http://www.geokniga.org/inboxes/5226> (date of access: 12.02.2020).
6. Ladynin A.V. Dipole sources of the main geomagnetic field // Geology and Geophysics. – 2014. V. 55, No. 4. P. 634-649.
7. Sokolov D. D. Geodynamo and magnetic field generation models (review) // Geomagnetism and Aeronomy. 2004. V. 44, No. 5. P. 579-589.
8. Suetin P.K. Classical orthogonal polynomials. Moscow : Science, 1979. 415 p.
9. Yanovsky B.M. Terrestrial magnetism. Leningrad : Leningrad University, 1978. 591p.
10. Pétrélis F. Simple Mechanism for Reversals of Earth's Magnetic Field / F. Pétrélis, S. Fauve, E. Dormy and J-P. Valet // Physical Review Letters. 2009. V. 102.
11. Viskovatov B. De la methode generale pour reduire toutes sortes des quantitees en fraction continues // Memoires de l'Academie Imperiale des Sciences de St. Petersburg. 1805. No. 1. P. 226-247.
12. Wiczorek M.A., Meschede M. SHTools: Tools for Working with Spherical Harmonics // Geochemistry, Geophysics, Geosystems. 2018. 19. P. 2574-2592. Doi: 10.1029/2018GC007529.
13. International Geomagnetic Reference Field [Electronic resource] // IAGA Division V-MOD: Geomagnetic Field Modeling. URL: <http://www.ngdc.noaa.gov/IAGA/vmod/igrf.html> (date of access: 16.02.2020).