

УДК 550.34.01

*Н.А. Горяевчев, Г.М. Митрофанов*

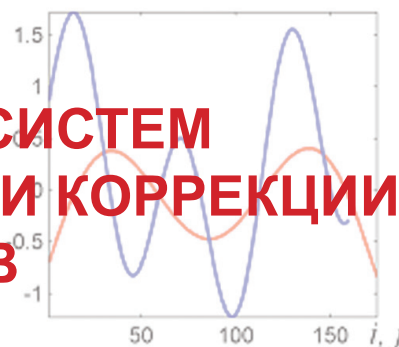
# ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ КОРРЕКЦИИ СЕЙСМИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

## Введение

Одна из серьезных проблем реальных сейсмических исследований состоит в высокой неоднородности условий возбуждения и приема колебаний, распространяющихся в среде и взаимодействующих с изучаемыми объектами. Она значительно влияет на решение обратных задач, привнося в них дополнительную неустойчивость, а часто и неединственность. Таким образом, уже эта проблема, относящаяся к предварительной обработке данных, содержит элементы, определяющие некорректность глобальной обратной задачи сейсмологии, решение которой используется в дальнейшем при геоинформатике. В определенных условиях задачу коррекции формы сигналов, направленную на устранение изменений, связанных с неоднородностью условий возбуждения и приема колебаний, можно свести к системе линейных уравнений [7]. Решение соответствующей системы линейных уравнений может быть построено как при помощи итерационных методов [4], так и на основе обращения матриц с существенным понижением их порядка, в частности клеточным способом [1]. В работе представлены оба способа. При этом анализируются особенности каждого из способов и демонстрируются сложности, которые необходимо учитывать при рассмотрении реальных наблюдений.

Возникающие сложности обусловлены тем, что данные системы линейных уравнений для реальных наблюдений представлены в виде прямоугольных матриц значительных порядков, с числом уравнений, существенно превышающим число неизвестных параметров. Кроме того, системы не имеют единственного решения, что вызвано, прежде всего двумя аспектами: линейной зависимостью между определяемыми параметрами и геометрией сейсмических наблюдений. Устранение неединственности первого вида может быть обеспечено путем введения дополнительных условий, например с использованием неопределенных множителей Лагранжа [8, 6]. Учет неединственности, связанной с геометрией сейсмических наблюдений, может быть выполнен посредством их трансформации, в частности через усечение «плохих» наблюдений, вносящих дополнительную неединственность в решение.

© Н.А. Горяевчев, Г.М. Митрофанов



В качестве примеров при построении и исследовании соответствующих систем линейных уравнений использовались реальные данные, относящиеся к морским сейсмическим наблюдениям, выполненным в акватории Баренцева моря. Они включали в себя 6231 точку возбуждения и 6246 точек приема. Соответствующая система содержала до ста тысяч уравнений и имела десятки тысяч неизвестных параметров, которые разбивались на две группы: фактор источника и фактор приемника. Данные факторы вносят существенные изменения в форму регистрируемого сейсмического сигнала [2]. Благодаря построенным решениям рассматриваемых систем линейных уравнений такие изменения можно скорректировать, приведя характеристики источников и приемников к почти идеальным условиям эксперимента, обычно формулируемым при постановке обратной задачи сейсмологии.

Результаты выполненных исследований были представлены на Восьмой международной молодежной научной школе-конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (Новосибирск, Академгородок, 1-7 сентября 2016 года) в форме доклада.

## Факторные модели и оценивание их параметров

Обобщающей моделью факторных представлений, учитывающих изменения формы сейсмического сигнала, которые связаны с условиями возбуждения, приема и распространения, является выражение [7]:

$$z_{ij} = \sum_{p=1}^P \gamma_p (c_1^p i + c_2^p j) \cdot \varphi_p (c_3^p i + c_4^p j) + \varepsilon_{ij}, \quad (1)$$

где  $z_{ij}$  представляют собой некоторые функционалы от сигналов, наблюдаемых в узлах двумерной решетки  $(i, j)$ , где  $i$  и  $j$  являются дискретными переменными (обычно, целочисленными). В качестве таких функционалов могут выступать времена приходов сигналов (в задаче коррекции временных статических поправок), логарифмы амплитуд или

спектров сигналов на фиксированной частоте (в задаче поверхностно-согласованной деконволюции). Под знаком суммы в правой части находятся заданные функции  $\varphi_p(c_3^{pi} + c_4^{pj})$  и неизвестные функции  $\gamma_p = (c_1^{pi} + c_2^{pj})$ . Последние являются параметрами или факторами модели. Коэффициенты:  $c_1^p, c_2^p, c_3^p, c_4^p$ , определяющие направления или линии для этих функций, считаются заданными действительными числами. Таким образом, функции  $\varphi_p$  и  $\gamma_p$  постоянны вдоль прямых линий (направлений)  $c_3^{pi} + c_4^{pj} = const$  и  $c_1^{pi} + c_2^{pj} = const$  соответственно. Простейшими из них являются направления, совпадающие с источниками или приемниками, определяемыми, соответственно, номерами  $i$  и  $j$ . Дополнительное слагаемое  $\varepsilon_{ij}$  включает в себя оставшуюся часть рассматриваемого функционала, которая не представлена факторными составляющими.

Модель (1) линейна относительно неизвестных параметров, что позволяет достаточно просто изучать ее свойства и использовать при значительных объемах исходных данных. Но более существенным моментом является то, что полученные на ее основе оценки неизвестных параметров (факторов) могут быть использованы при решении различных задач, например учета вариаций формы сигнала или определения целевых параметров среды.

Структура модели (1) определяет блочный характер системы линейных уравнений, возникающей при рассмотрении анализируемой совокупности  $z_{ij}$ . Поэтому для такой системы воспользуемся представлением:

$$z = X\theta + \varepsilon, \tag{2}$$

где векторы  $z$  и  $\varepsilon$  составлены из значений  $z_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  соответственно, которые упорядочены определенным образом по точкам наблюдения, а вектор  $\theta$  составлен из определяемых значений факторов  $\gamma_p$ . Тогда матрица  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_p\}$  состоит из блоков  $X_p$ , элементы которых определяются значениями функции  $\varphi_p$ , а также входением определенного значения фактора  $\gamma_p$  в фиксированное  $z_{ij}$ .

Блочный характер матрицы  $X$  позволяет перейти к блочной структуре системы линейных уравнений метода наименьших квадратов (МНК), обеспечивающей решение переопределенной системы (2), когда число наблюдений превышает число неизвестных значений факторов, а также реализовывать итерационный процесс последовательного уточнения оценок неизвестных параметров, который может быть представлен следующей матричной формой [5]:

$$\theta^{(l)} = T\theta^{(l-1)} + B\hat{z}, \tag{3}$$

где справедливы матричные равенства:

$$B = E_p + \sum_{j=1}^{p-1} C_j^p E_j, \quad T = - \sum_{j=1}^{p-1} C_j^p E_j R_{j+1...p}^j, \tag{4}$$

$$C_j^p = \prod_{i=P}^{j+1} (I_{i-1} - E_i R_{1...i-1}^i).$$

Здесь  $\theta^{(l)}$  – вектор оценок факторов, полученный на  $l$ -й уточняющей итерации, а вектор  $\hat{z} = X^T z$  и является вектором правых частей системы МНК. Матрицы  $E_j$  и  $R_{k...m}^j$ , фигурирующие в этих выражениях, составлены из комбинаций блоков  $X_j$  в форме  $X_k^T X_j$  или  $(X_k^T X_j)^{-1}$ , а  $I_j$  являются блоками единичной матрицы. При этом матрицы  $X_k^T X_j$  совпадают с блоками матрицы МНК.

В результате проведенных исследований удалось доказать, что итерационный процесс (3) представляет собой частный случай процесса верхней релаксации [3] с параметром единица и, следовательно, сходится к решению метода наименьших квадратов для системы (2). При этом он не требует построения общей матрицы системы и прост в организации вычислений, что может оказаться существенным при больших объемах данных (сотни тысяч и миллионы). Также он слабо зависит от возможных отбраковок наблюдений при их анализе. Одновременно на его основе может выполняться исследование вопросов о структуре не единственно определяемых составляющих факторов. Последнее важно при решении вопросов о требуемой априорной информации.

Когда вопрос о структуре не единственно определяемых составляющих факторов решен, то может быть сформирована априорная информация, обеспечивающая единственное решение системы (2). Вид априорной информации определяется реальными данными или некоторыми эвристическими соображениями, которые могут носить, например, конечно-разностный или статистический характер. Для факторных моделей (1) такие соображения достаточно просто формулируются в линейной форме [9, 6], что позволяет перейти на основе неопределенных множителей Лагранжа [8] к расширенной системе МНК:

$$\begin{cases} X^T X \theta_m = \hat{z} \\ H \theta_m = c \end{cases}, \tag{5}$$

где матрица  $H$  и вектор  $c$  определяются видом априорных данных. При отсутствии реальной априорной информации второе матричное уравнение может быть сформировано на основе указанных эвристических соображений. В этом случае, обычно,  $c \equiv 0$ .

### Исследование решения системы для реальных данных

В качестве исходных данных были взяты наблюдения морской сейсмической съемки, прово-

дившейся с заглубленной установкой в акватории Белого моря. Не вдаваясь в детали проводимого сейсмического эксперимента, полученные наблюдения можно представить в виде точек на плоскости, где вертикальная координата соответствует индексу  $i$ , а горизонтальная координата – индексу  $j$  модели (1). На рис. 1 представлены два вида систем наблюдений: с неподвижными тремя точками приема сейсмических колебаний (левая часть рис. 1а) и подвижными приемниками, когда их положение изменяется с изменением положения источника (правая часть рис. 1а). Именно последняя система наблюдений использовалась в рассматриваемом реальном эксперименте. При этом количество приемников, отвечающих определенному источнику, равнялось 16.

Отметим, что система наблюдений с подвижными источниками приводит к существенному отличию задачи разделения факторов в сейсмическом эксперименте от классической задачи дисперсионного анализа [9]. В последней, обычно, используются системы наблюдений, аналогичные левой части рис. 1а.

В случае простейшей двухфакторной модели, имеющей вид:

$$z_{ij} = \gamma_1(i) + \gamma_2(j) + \varepsilon_{ij}, \quad (6)$$

который получается из выражения (1) при  $P = 2$ ,  $c^1_1 = 1, c^1_2 = 0, c^2_1 = 0, c^2_2 = 1$  и  $\varphi_p(c_3^p i + c_4^p j) \equiv 0$ . При этом матрица  $X$  системы (2) для типичного плана наблюдений дисперсионного анализа имеет вид, показанный в левой части рис. 1б. Для сейсмической системы наблюдений с подвижными приемниками матрица  $X$ , показанная в правой части рисунка 1б, имеет иную структуру. Обе матрицы – вырождены, с одной линейной зависимостью между столбцами, относящимися к группам факторов источников и приемников. Такая зависимость является известной для факторных моделей и связана с невозможностью единственного определения постоянных составляющих факторов этих групп.

Более интересным представляется влияние изменения вида системы наблюдения на свойства матрицы и решение, получаемое с использованием итерационного процесса последовательного уточнения

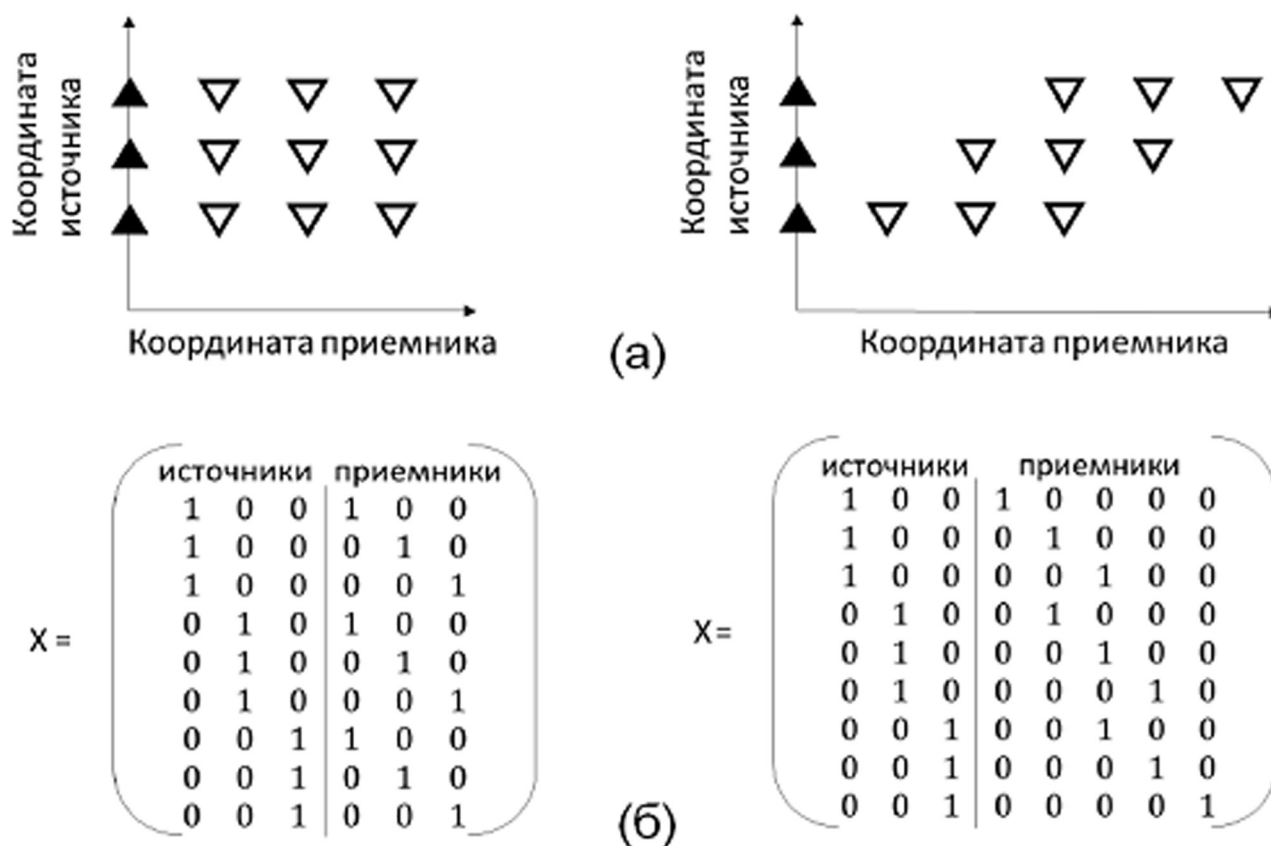


Рис. 1. Влияние вида системы наблюдений на структуру матрицы  $X$ :  
 (а) – два вида систем наблюдений;  
 (б) – соответствующие им структуры матриц,  
 получаемые в случае двухфакторной модели (пояснение в тексте)

Fig. 1. Influence of the kind of the observation system on the structure of the matrix  $X$ :  
 (a) – two kinds of observation systems;  
 (b) – the corresponding matrix structures obtained in the case of the two-factor model (explanation in the text)

оценок факторов. На изменение свойств матриц указывают значения их сингулярных чисел. Так, для левой и правой матрицы рис. 1б они равны: {2,45; 1,73; 1,73; 1,73; 1,73; 2,53·e – 16} и {2,3; 1,97; 1,83; 1,55; 1,29; 0,96; 0,68; 1,32·e – 16}. Здесь последние малые значения отвечают указанной линейной зависимости между группами факторов. Полученные значения сингулярных чисел указывают на тенденцию к их уменьшению при переходе к перемещаемым наблюдениям. Это может быть объяснено незаполненностью прямоугольной области, относительно которой определяются значения факторов. Подобная тенденция усиливается при переходе к большим системам наблюдений.

На рис. 2а показаны системы наблюдений с подвижными приемниками. При этом левая системы наблюдений имела 128 приемников, а правая – 16 приемников. Обе системы наблюдений содержали

160 источников. Представленные на рисунке 2б значения сингулярных чисел свидетельствуют о значительном влиянии системы наблюдений на свойства матрицы X.

С целью изучения влияния системы наблюдений на получаемое решение нами были выполнены различные тестовые эксперименты. Ниже приводятся результаты, относящиеся к экспериментам, где вариации факторов за источники и приемники моделировались синусоидальными функциями с различными частотами. Появление таких экспериментов связано с хорошо известной проблемой «низкочастотной статики». Смысл проблемы заключается в том, что при определении оценок факторов за источники и приемники в реальных сейсмических исследованиях хорошо оцениваются только высокочастотные вариации (с периодом менее длины расстановки).

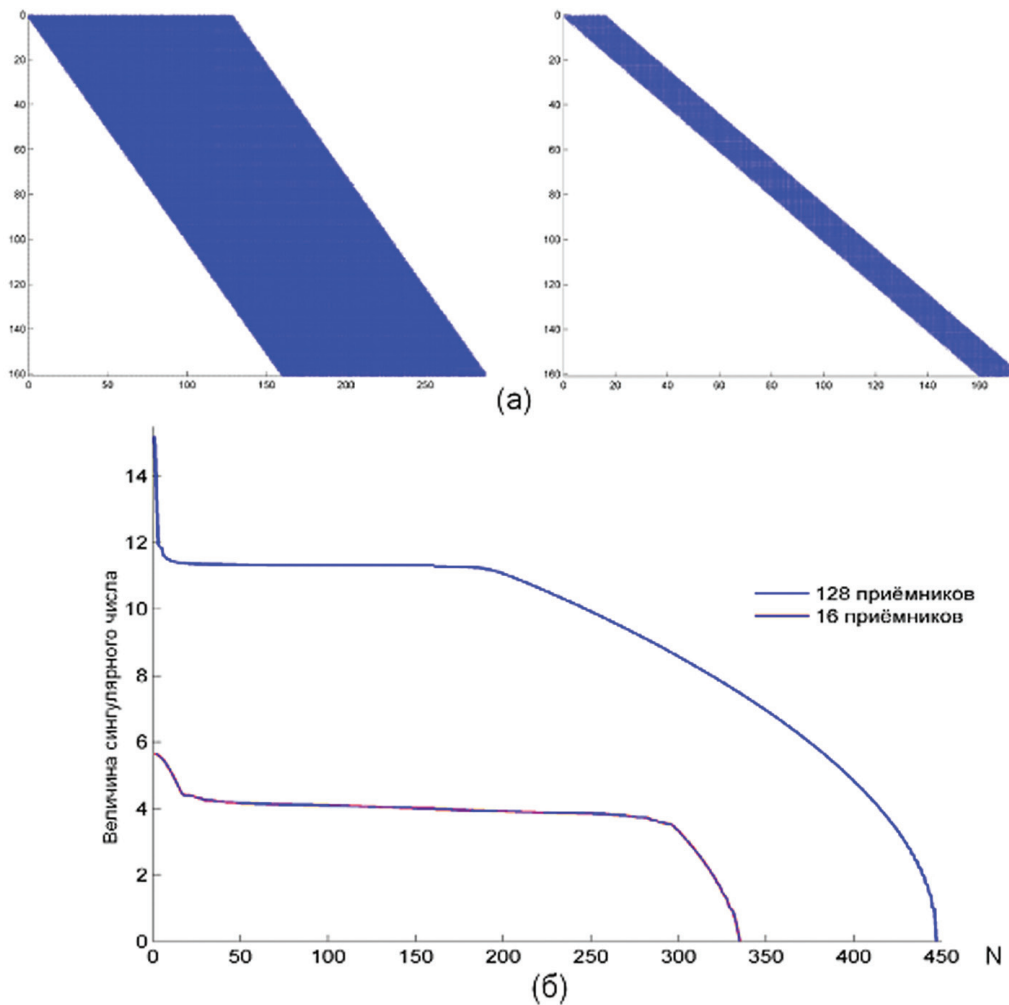


Рис. 2. Влияние вида системы наблюдений на поведение значений сингулярных чисел матрицы X: (а) – два вида систем наблюдений с разным числом приемников; (б) – соответствующие им значения сингулярных чисел (пояснение в тексте)

Fig. 2. Influence of the kind of the observation system on the behavior of the values of the singular numbers of the matrix X: (a) – two kinds of observing systems with different number of receivers; (b) – the corresponding values of singular numbers (explanation in the text)



На рис. 3 представлены результаты двух экспериментов по определению значений факторов с использованием итерационного процесса последовательного уточнения, когда в качестве систем наблюдений были взяты те, что представлены на рис. 2а. При этом верхний ряд рисунков относился к системе наблюдений, содержащей 128 приемников, а нижний ряд – 16 приемников. Модельные значения факторов показаны на рис. 3а, а результаты их определения представлены на рис. 3б. Здесь синим цветом изображены значения фактора за источник  $\gamma_1(i)$ , а красным цветом – значения фактора за приемник  $\gamma_2(i)$ . Очевидно, что первые наблюдения имеют большее число значений фактора за приемник. На рис. 3в показаны значения логарифмов среднеквадратических отклонений по выполненным итерациям.

Согласно с приведенными результатами эксперимента, для системы наблюдений, содержащей 128 приемник в расстановке, удается с высокой точностью определить значения моделируемых параметров при высокой скорости сходимости итерационного процесса. Для второй системы наблюдений, где период вариаций параметров в несколько раз превышает длину расстановки приемников, скорость сходимости итерационного процесса существенно замедляется, а получаемые

оценки обладают низкой точностью. В процессе проведения экспериментов было отмечено, что в значениях факторов удается разделять пространственные частоты, но в них начинают проявляться некоторые трендовые составляющие, обладающие периодической структурой.

В связи с тем, что реальная система наблюдений содержала 16-канальную расстановку при значительном числе источников, нами было выполнены эксперименты, ориентированные именно на подобные системы наблюдений. Ниже на рис. 4 и 5 приведены результаты по некоторым из этих экспериментов. В верхней части рисунков представлены модельные значения факторов, в средней части даны результаты их определения, а в нижней части – значения логарифмов среднеквадратических отклонений по итерациям. Данные результаты характеризуют возможности разделения факторов для различных пространственных частот, присутствующих в наблюдениях и связанных с вариациями формы сигнала в источниках и приемниках. Они подтверждают выводы, полученные на меньших системах наблюдений, и позволяют сформулировать некоторое эвристическое соображение о природе трендовых составляющих, появляющихся в низкочастных значениях параметров.

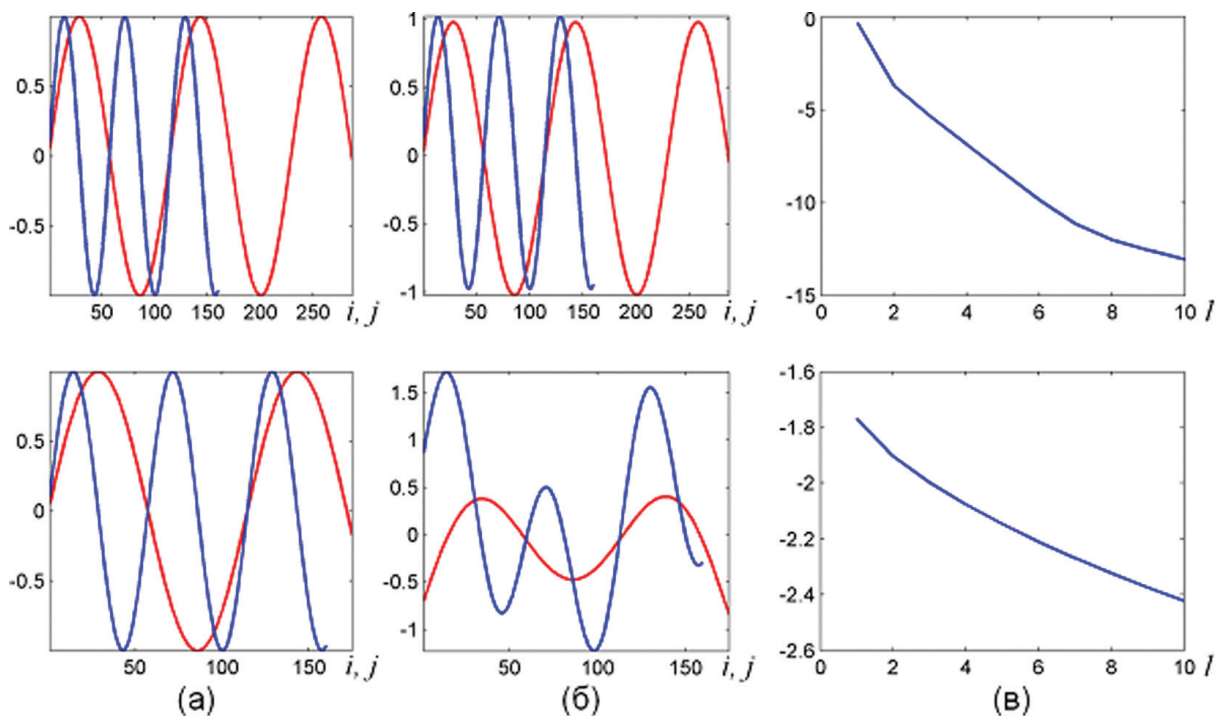


Рис. 3. Определение модельных значений факторов по различным системам наблюдений (пояснение в тексте)

Fig. 3. Determination of values of factors of synthetic model for different observing systems (explanation in the text)

При повышении пространственных частот у разделяемых факторов для системы наблюдений рис. 2а происходит их устойчивое определение в процессе итерационного оценивания, о чем свидетельствует результат рис. 4а, где период вариаций фактора источника близок к длине расстановки (сравните с результатом рис. 3б). Однако при увеличении периода вариаций этого фактора до полутора расстановок и, соответственно, периода вариаций фактора приемника до трех расстановок происходит ухудшение качества определяемых параметров с заметной корреляцией изменений фактора источника с более медленными изменениями фактора приемника (рис. 4б). Эта зависимость сохраняется при переходе к системам наблюдений, содержащим большее число источников, о чем говорят результаты рис. 5.

Выявленная зависимость свидетельствует о том, что при реализации процесса последовательного уточнения для систем наблюдений с подвижной расстановкой и большим числом источников, многократно превышающим длину расстановки приемников, происходит локализация не единственно определяемых составляющих факторной модели. В частности, для двухфакторной модели (6), где неоднозначно определяется только постоянная составляющая, такая локализация приводит к перераспределению ее величины вдоль профиля. Как результат, мы имеем неоднозначность определения низкочастотных составляющих факторов, если они присутствуют одновременно, как в источниках, так и в приемниках. Но эта неоднозначность определяется не самой факторной моделью, а системой

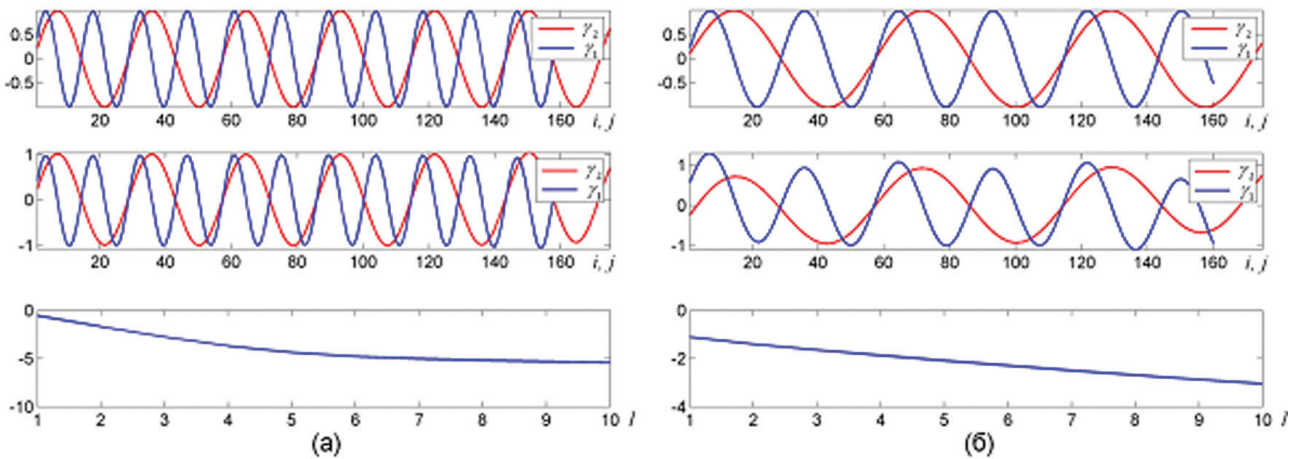


Рис. 4. Определение значений факторов с различной пространственной частотой при 160 источниках (пояснение в тексте)

Fig. 4. Determination of factors values with different spatial frequency at 160 sources (explanation in the text)

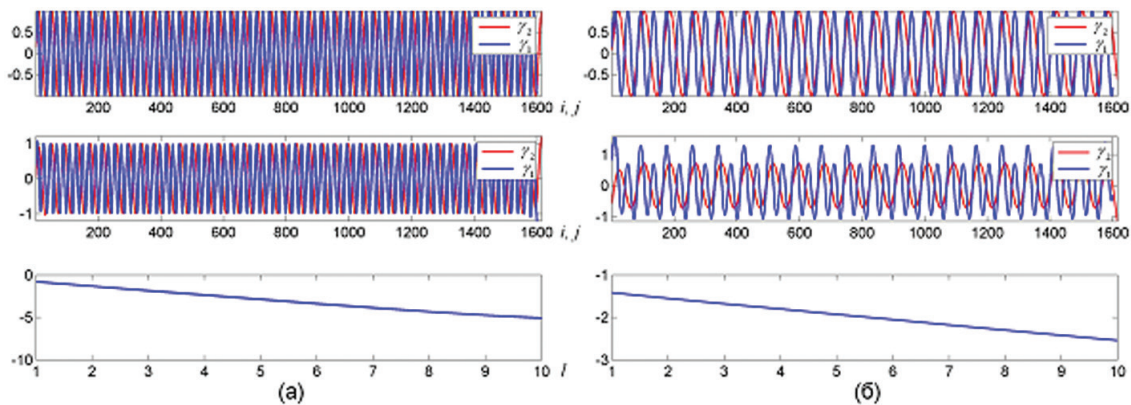


Рис. 5. Определение значений факторов с различной пространственной частотой при 1600 источниках (пояснение в тексте)

Fig. 5. Determination of factors values with different spatial frequency at 1600 sources (explanation in the text)

наблюдений, не обеспечивающей достаточную связь различных наблюдений и параметров модели между собой.

Указанную связанность могут обеспечить условия, вводимые в расширенную систему уравнений (5) в виде псевдоаприорной информации [6]. Для двухфакторной модели (6) эти условия имеют простой вид. Например

$$\sum_{p=1}^J \gamma_2(j) = 0, \quad (7)$$

которые относят постоянную составляющую к фактору за источники. Применение такого условия обеспечивает для модельных данных высокую точность разделения факторов через решение системы (5), о чем говорят результаты рис. 6.

На приведенном рисунке представлены результаты разделения значений факторов в форме двух единиц (рис. 6а) и низкочастотных синусоид (рис. 6б), период которых превышал длину 16-канальной расстановки в полтора раза, т.е. соответствовал эксперименту (рис. 4б) для итерационного оценивания. Небольшие смещения в определенных значениях факторов связаны с перераспределением постоянной составляющей из значения фактора за приемники в значения фактора источника. Но такое перераспределение носит уже не локальный, а глобальный характер, приводя к общей подвижке всех значений фактора. В результате мы освобождаемся от проблемы низкочастотной статики, вызванной особенностью системы наблюдений с перемещаемыми приемниками.

Практическая реализация указанного подхода к решению систем линейных уравнений для реальных данных, полученных с заглубленной приемной системой в акватории Белого моря, позволила выполнить

декомпозицию формы сигнала прямой волны. Установка, позволявшая проводить наблюдения прямой волны, содержала 16 приемников. Всего было выполнено 6231 точек возбуждения. Таким образом, двухфакторная модель (6) содержала 6231 значение фактора за источник и 6246 значений фактора за приемник на каждой из обрабатываемых временных частот. Полоса регистрируемых частот составляла от 1 Гц до 5000 Гц. Результаты выполненного факторного разложения по всем анализируемым частотам представлены на рис. 7, где цветовым образом показаны определенные значения фактора за источник. Они характеризуют изменения формы сейсмического сигнала, относящиеся к условиям возбуждения колебаний вдоль всего профиля наблюдений.

### Заключение

Результаты определения значений факторов на основе итерационного процесса последовательного уточнения оценок демонстрируют два важных эффекта. Во-первых, наличие в наблюдениях длиннопериодных и среднепериодных пространственных составляющих, относящихся к различным факторам, при построении оценок по группам наблюдений приводит к существенному искажению всех оценок. Это может оказывать существенное влияние на результаты геомоделирования, искажая характеристики всех моделируемых объектов. Во-вторых, уменьшение остаточных вариаций при увеличении числа уточняющих итераций указывает на сходимость итерационного процесса, но не гарантирует получение более качественных оценок для определяемых характеристик.

В случае матричного способа обеспечивается высокая точностью определения соответствующих значений, исключая постоянные составляющие, при

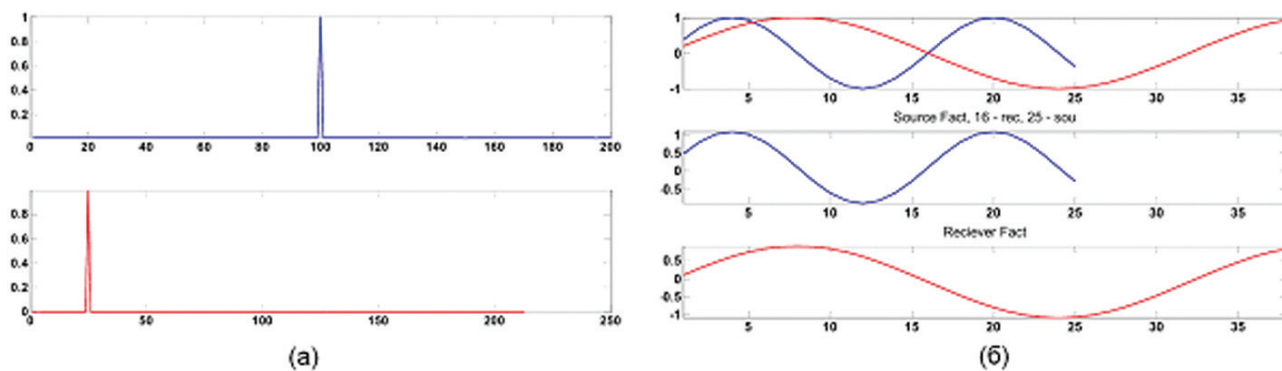


Рис. 6. Определение значений факторов на основе решения расширенной системы линейных уравнений (пояснение в тексте)

Fig. 6. Determination of factors values based on the solution of the extended system of linear equations (explanation in the text)



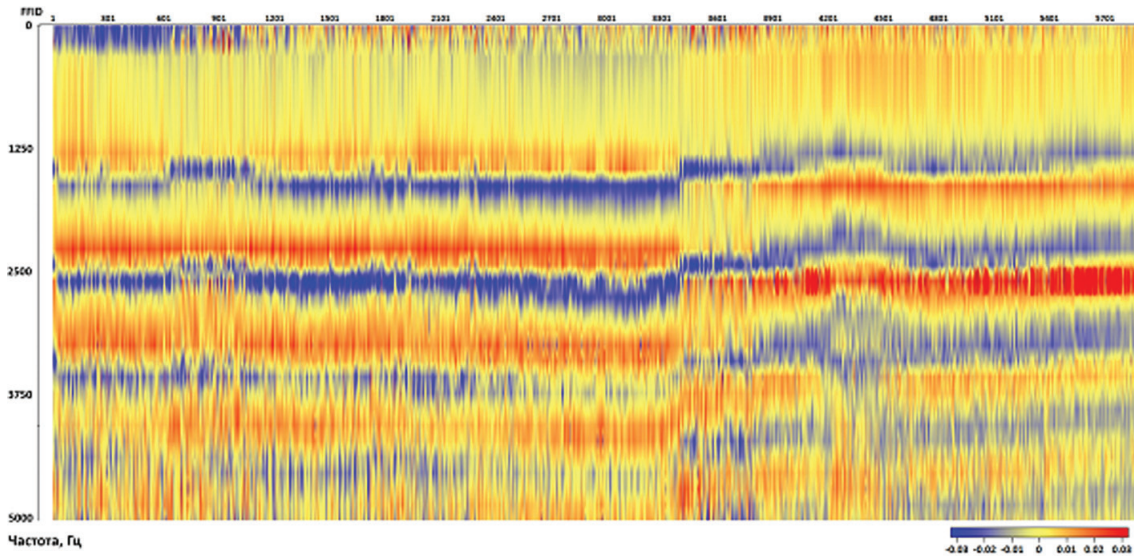


Рис. 7. Оценки фактора за источник, полученные по спектрам сигналов прямой волны

Fig. 7. Estimates of the source factor, obtained from signals spectra of the direct wave

фиксировании которых применялось эвристическое условие. Но такие составляющие могут быть однозначно определены на основе дополнительной информации. Здесь важно, что такой информации требуется существенно меньше, чем в первом итерационном способе, где требуется контролировать длиннопериодные и среднепериодные пространственные составляющие.

**Ключевые слова:** системы линейных уравнений, факторное разложение, сейсмические данные многократных перекрытий, итерационное оценивание, длиннопериодная статика.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. – М. : Наука, 1977. – 304 с.
2. Горевачев Н.А., Исаенков Р.И., Митрофанов Г.М., Токарев М.Ю. Изменение формы исходного импульса при морских сейсмических исследованиях // Технологии сейсморазведки. – 2016. – № 4. – С. 67-76.
3. Марчук Г.И., Кузнецов Ю.А. Итерационные методы и квадратичные функционалы // Методы вычислительной математики : сб. науч. трудов. – Новосибирск : Наука, 1975. – 273 с.
4. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М. : Наука, 1977. – 456 с.
5. Митрофанов Г.М. Последовательное уточнение оценок линейных факторов при интерпретации данных сейсморазведки // Геология и геофизика. – 1978. – № 2. – С. 109-122.
6. Митрофанов Г.М. Псевдоаприорная информация в задаче коррекции частотно-зависимой статистики // Математические проблемы интерпретации данных сейсморазведки. – Новосибирск : Наука, 1988. – С. 149-168.

7. Митрофанов Г.М. Гомоморфная фильтрация и слепая деконволюция // Технологии сейсморазведки. – 2015. – № 1. – С. 46-56.
8. Рао С.Р. Линейные статистические методы и их применение. – М. : Наука, 1968. – 548 с.
9. Шеффе Г. Дисперсионный анализ. – М. : Наука, 1980. – 512 с.

#### REFERENCES

1. Voevodin V.V. Computational fundamentals of linear algebra. Moscow : Science, 1977. 304 p.
2. Goreyavchev NA, Isayenkov RI, Mitrofanov GM, Tokarev M.Yu. Change in the shape of the initial pulse in marine seismic studies. // Technologies of seismic prospecting. 2016. No. 4. P. 67-76.
3. Marchuk GI, Kuznetsov Yu.A. Iterative methods and quadratic functionals // Methods of computational mathematics. – Novosibirsk : Science, 1975.
4. Marchuk G.I. Methods of computational mathematics. Moscow : Nauka, 1977. 456 p.
5. Mitrofanov G.M. Sequential refinement of estimates of linear factors in the interpretation of seismic data // Geology and geophysics. 1978. No. 2. P. 109-122.
6. Mitrofanov, G.M. Pseudo-priori information in the problem of correction of frequency-dependent statics // Mathematical problems of interpretation of seismic data. – Novosibirsk : Science, 1988. P. 149-168.
7. Mitrofanov G.M. Homomorphic filtration and blind deconvolution // Technologies of seismic prospecting. 2015. No. 1. P. 46-56.
8. Rao S.R. Linear statistical methods and their application. Moscow : Nauka, 1968. 548 p.
9. Scheffe G. Dispersion Analysis. Moscow : Nauka, 1980. 512 p.