

УДК 550.831.016:519.6

© Коллектив авторов

*П.И. Балк, А.С. Долгаль, Т.В. Балк, Л.А. Христенко*

# СОГЛАСОВАНИЕ КОНКУРИРУЮЩИХ ВАРИАНТОВ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ГРАВИТАЦИОННЫХ АНОМАЛИЙ МЕТОДОМ МИНИМИЗАЦИИ ЭМПИРИЧЕСКОГО РИСКА

## Введение

Концепцию согласования допустимых решений обратных задач гравиразведки и магниторазведки, сформулированную В.Н. Страховым, можно рассматривать как конструктивное контрпредложение к господствующей концепции «оптимальных» решений по минимуму скалярного критерия попарного сравнения альтернативных вариантов интерпретации, несостоятельность которой доказана с общих позиций в теории выбора [1]. Какому бы признаку оптимальности ни отвечало то или иное решение, оно не является безальтернативным и потому нелогично, когда все допустимые решения, кроме одного, играют пассивную роль «статистов». Если так, то в любом случае подлинно наилучший вариант интерпретации должен реагировать на информацию, которую несет любое решение, согласующееся с априорными ограничениями  $G$  – ведь не исключено, что именно оно является истинным решением или его наилучшей аппроксимацией. И пусть такой согласованный вариант – это опять же одно из допустимых решений, здесь нет противоречия; авторы полагают, что оптимальность решения, если о таковой вообще можно говорить, проявляется лишь тогда, когда она явилась следствием неформального совместного анализа всех альтернативных вариантов интерпретации.

Значение, которое В.Н. Страхов придавал концепции согласования, видно хотя бы из того, что она вошла в число пяти общеметодологических идей фундаментального характера [16]. Если говорить о примерах ее непосредственного приложения, то в работах В.Н. Страхова она обслуживает одну из двух методобразующих идей – концепцию алгебраизации обратных задач, по поводу которой на страницах «Геофизики» в свое время велась довольно оживленная дискуссия. В силу указанной подчиненности идея согласования допустимых решений отрабатывалась В.Н. Страховым на обратных задачах, в которых оценку параметров модели можно свести к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Специфика этого класса задач сказалась на том, что, по представлениям В.Н. Страхова, согласование множества допустимых решений, построенных различными методами, должно осуществляться путем их усреднения [17].

## Концепция согласования допустимых вариантов интерпретации в существующих методах решения обратных задач гравиразведки

Как обнаружили авторы, концепция согласования допустимых решений неявно присутствует в ряде алгоритмов, разработанных до того, как она нашла современное прочтение в математической теории интерпретации потенциальных полей. Так, по результатам работ [2, 9, 10] можно утверждать, что идея согласования допускает более широкое толкование, чем процедура усреднения альтернативных решений, да и результат согласования не обязан выражаться в терминах одного из допустимых вариантов интерпретации. В обновленном понимании концепция согласования способна продуцировать разнообразные и существенно различающиеся между собой постановки обратных задач геофизики. Алгоритмы решения рудных [2], структурных [10] и линейных [9] обратных задач гравиразведки, реализующие идею гарантированного подхода, вполне можно рассматривать как процедуру согласования допустимых вариантов интерпретации, если под последним понимать обнаружение геологически содержательных свойств модельных решений, не противоречащих всей априорной информации  $G$ . При условии близости истинного решения обратной задачи к одному из элементов множества  $Q_0$  известных допустимых решений, эти свойства могут рассматриваться как достоверная информация об изучаемом объекте.

В обратной задаче гравиразведки рудного типа, когда аномалия обусловлена массами известной избыточной плотности, размещенными в оцениваемой

области  $\hat{S}$  – носители масс, результатом согласования носителей  $S_i^*$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , составляющих множество  $Q_0$ , является пара областей  $\langle D_1, D_2 \rangle$ , обеспечивающих неуплощаемое включение  $D_2 \subset S_i^* \subset D_1$  для всех  $S_i^* \in Q_0$  (хотя возможно, что  $D_2 = \emptyset$ ). В обратной задаче для границы раздела  $z = \hat{\Gamma}(x, y)$  двух плотностных сред результат согласования допустимых границ  $z = \Gamma_i^*(x, y)$  суть их внутренняя и внешняя огибающие  $\Gamma_1(x, y)$ ,  $\Gamma_2(x, y)$ , удовлетворяющие для всех  $\Gamma_i^*(x, y)$  неравенству  $\Gamma_2(x, y) \leq \Gamma_i^*(x, y) \leq \Gamma_1(x, y)$ . В линейной обратной задаче, когда оценке подлежит вектор избыточных плотностей  $\hat{\delta}_i$  масс, сосредоточенных в фиксированных носителях  $\hat{S}_i$ , результатом согласования являются неуплощаемые оценки  $(\delta_i^{min}, \delta_i^{max})$ :  $\delta_i^{min} \leq \hat{\delta}_i \leq \delta_i^{max}$ . Во всех трех задачах результаты интерпретации уже не выражаются в терминах элементов модельных классов  $M$  источников поля.

Еще одна, принципиально отличная от прежних, форма согласования решений обратных задач гравиразведки – пространственные распределения нормированных числовых параметров, позволяющие оценить вероятность обнаружения источников поля в любой точке достаточно широкой пространственной области  $D$ . Известны несколько функций такого рода, каждая из которых ориентирована на решение определенного круга поисковых задач. Так, значениями функция локализации  $\lambda(X)$  [14] в каждой точке  $X \in D$  являются частоты встречи среди построенных допустимых носителей  $S_i^*$ , тех, что содержат данную точку. Функция обнаружения  $\nu(X)$  [6] дает оценку вероятности подсечения кровли аномалиеобразующего объекта вертикальной скважиной, пробуренной в точку  $X$ . В обоих случаях само согласование заключается в слиянии и синтезе информации, которую содержит каждый из альтернативных вариантов интерпретации, а итоговый результат также не выражается в терминах допустимых решений обратной задачи.

Области  $D_1$  и  $D_2$ , равно как и пространственные распределения вероятностных параметров, безусловно привлекательны. Оказалось, что стоит только избавиться от стереотипного определения результата интерпретации, как обнаруживаются новые возможности повышения информативности гравиразведки, в реализации которых главную роль играет идея согласования найденных вариантов решения обратной задачи. Вдохновившись этим успехом, можно было бы и дальше разрабатывать идею, оставаясь вне привычных форм представления результата интерпретации. Но нельзя сбрасывать со счетов важный субъективный момент: доверие геолога (заказчика геофизических исследований) к подобным новшествам будет достигнуто лишь тогда, когда в дополнение к ним приводится одно или

несколько конкретных распределений возмущающих масс, допустимость которых можно подтвердить путем решения прямой задачи. Логично, если множество допустимых вариантов интерпретации будет представлено не какими-то случайными решениями, а теми, оптимальность которых прямо завязана на информативность.

### Некоторые предварительные замечания общего характера

Цель статьи – продемонстрировать, что на основе концепции согласования В.Н. Страхова, если ее понимать в самом широком смысле этого слова, можно строить эффективные решения обратных задач в привычных терминах.

Проблема унификации математического обеспечения, которую неоднократно поднимал В.Н. Страхов, налагает определенные обязательства на предлагаемые методы решения обратных задач. Мало обосновать состоятельность нового метода – необходимо обосновать полезность и целесообразность его практического использования в свете того, какими методами аналогичной направленности располагает математическая теория интерпретации потенциальных полей. Также необходимо, исходя из реалий геофизической практики, четко определиться в вопросе о границах принципиально возможного. Если за критерий состоятельности алгоритма принять – что кажется вполне естественным – точность построенного с его помощью решения конкретной обратной задачи в конкретных условиях интерпретации, то с огорчением придется констатировать: ни один алгоритм, какие бы «мудреные» математические выкладки за ним ни стояли, не в состоянии отыскать решение, гарантированно превосходящее по точности другое допустимое решение, построенное даже по другому математически непривлекательному алгоритму. Говоря проще, можно наугад «ткнуть пальцем» в первое попавшееся допустимое решение и оно де-факто, хотя и случайно, окажется более предпочтительным. Если уж договаривать до конца, то нельзя исключить ситуацию, когда лучшим вообще окажется решение, построенное в рамках не вполне адекватной интерпретационной модели. Необходимо раз и навсегда отказаться от попытки отыскать некий мегаоптимальный критерий выбора, способный в каждом отдельном случае обеспечить гарантированно более высокую точность решения обратной задачи.

И это еще не все. Традиционные методы интерпретации данных гравиразведки в терминах «оптимального» решения  $S^{opt} \in Q$  не располагают собственными средствами оценки достоверности своих результатов. Пользуясь тем, что понятие информации

до сих пор строго не определено и профессионалы в этой области рекомендуют вводить свои понятия в каждой отдельной науке, авторы ввели несколько определений. Используя эти понятия, можно утверждать: по результатам интерпретации в терминах «оптимального» решения невозможно локализовать ни общий фрагмент  $S^{opt} \cap \hat{S}$  модельного и истинного носителей (скрытую информацию), ни фрагмент  $S^{opt} \setminus \hat{S}$  (ложную информацию), ни фрагмент  $\hat{S} \setminus S^{opt}$  (потерянную информацию). Больше того, нельзя определить меру общности  $\mu(\hat{S} \cap S^{opt})$  истинного и найденного решения обратной задачи, пусть без установления пространственного положения области  $\hat{S} \cap S^{opt}$ . Это приводит к безрадостному выводу [5]: при кажущемся многообразии существующие методы решения обратных задач гравиметрии, основанные на скалярных критериях оптимальности, в плане итоговой информативности по сути являются эквивалентными. Авторы надеются, что объективный читатель не станет отрицать справедливость этого вывода. И никакой путаницы с обещанной в теории решения некорректных задач сходимостью при абсолютно надуманных и нереализуемых на практике предпосылках (стремление нормы помехи в наблюдаемых значениях поля к нулю, континуальное множество задания точек измерения) здесь быть не должно. Если так, то остается одно перспективное направление совершенствования математического аппарата решения обратных задач: повышение «средних показателей» алгоритмов. Подобные алгоритмы могут базироваться, в частности, на идее минимизации эмпирического риска, широко используемой при принятии решений в условиях неопределенности. Смысл его раскроем на примере обратной задачи рудного типа.

Начнем же с того, что для обратных задач гравиразведки имеют значение только модельные классы  $M$  источников аномалии с конечным числом параметров, что обусловлено дискретным характером измерений поля. Пусть  $Q$  – множество всех решений  $S_\alpha$  обратной задачи гравиразведки, отвечающих априорной информации  $G$ , выраженной в терминах принятой модели интерпретации,  $Q'$  – ассоциированное с  $Q$  множество векторов  $c = (c_1, c_2, \dots, c_m)$  в описании модельных носителей  $S_\alpha(c) \in M$ . К примеру:  $M$  – система выпуклых многогранников с числом вершин  $k = m/3$ ,  $c$  – вектор координат его вершин, а априорная информация  $G$  содержит, помимо прочего, двухсторонние ограничения на значения этих координат. Строго говоря, необходимо считаться с тем, что природный носитель  $\hat{S} \notin M$ . Если так, то следует ввести в рассмотрение модельный носитель  $S^\circ$ , на котором достигается минимум расстояния  $\rho(S_\alpha, \hat{S})$ ,  $S_\alpha \in M$ , и в дальнейшем считать оцениваемым

носитель  $S^\circ$ , а не  $\hat{S}$ . Величина  $\rho(S^\circ, \hat{S})$ , которую можно считать одной из поправок за неадекватность, характеризует аппроксимационные возможности модельного класса  $M$ . Если в дополнение к этому в допустимое значение невязки наблюдаемого и модельного полей внести поправку в виде ожидаемой нормы уклонения поля масс, распределенных по  $S^\circ$ , от наблюдаемого, то этого будет достаточно, чтобы осуществлять построения с учетом неадекватности интерпретационной модели. Чтобы не оттенять изложение основного материала проблемой неадекватности, не будем брать ее в учет, тем более что используемый в дальнейшем конечноэлементный модельный класс  $M$  позволяет в силу высоких аппроксимационных возможностей пренебречь обеими поправками.

### Сущность концепции минимизации риска

Введем в рассмотрение неотрицательный функционал  $\Omega(S_\alpha, \hat{S})$  – штраф за неверно выбранное решение  $S_\alpha$ ; его еще называют функционалом потерь. Поскольку с задачей оценки геометрического места точек, занятых источниками аномалии, хорошо согласуются метрики, порожденные мерой Лебега  $\mu$  в евклидовом пространстве  $\mathbf{R}^3$ , то в качестве функционала  $\Omega$  можно порекомендовать метрику Штейнхауса:

$$\Omega(S_\alpha, S_\beta) = 1 - \frac{\mu(S_\alpha \cap S_\beta)}{\mu(S_\alpha \cup S_\beta)}. \quad (1)$$

Функционал (1) нормирован –  $\Omega(S_\alpha, S_\beta) \in [0, 1]$ . Он принимает значение 1, если открытые множества  $S_\alpha, S_\beta$  не имеют общих точек, и значение 0, если они совпадают. Если оцениваемый вектор  $\hat{c}$  параметров истинного носителя  $\hat{S}$ , которым может оказаться любая точка  $c \in Q'$ , рассматривать как случайный, то можно ввести в рассмотрение функцию плотности распределения  $\varphi(c)$ ,  $c \in Q'$ , случайного вектора  $c$ , отвечающего за возможные положения детерминированного вектора  $\hat{c}$  в пределах множества  $Q'$ . Тогда функционал риска

$$R(c^*) = \int_{Q'} \Omega(c^*, c) \varphi(c) dc \quad (2)$$

представляет собой математическое ожидание потерь  $\Omega$  за принятие вектора  $c^*$  в качестве оценки вектора  $\hat{c}$ , тогда как в действительности  $\hat{c} = c$ . В качестве оптимальной оценки вектора  $\hat{c}$  логично взять вектор  $c^{opt} \in Q'$ , на котором достигается минимум функционала  $R$ .

Функционал  $\Omega$  не обязательно должен удовлетворять всем аксиомам метрики, в частности неравенству треугольника, которое тут не играет роли. Важно, чтобы он был содержательным и монотонно зависел от качества приближения вектором  $c^*$  вектора  $\hat{c}$ .



В каких-то случаях удобно, чтобы функционал  $\Omega(c^*, \hat{c})$  имел противоположный смысл и олицетворял собой не потери, а выигрыш от принятия вектора  $c^*$  как оценки вектора  $\hat{c}$ . В таких случаях вместо  $R$  будем использовать обозначение  $W$ . Как пример, в качестве функционала выигрыша можно взять отношение объема (меры) пространственной области, общей для модельного и истинного носителей, к суммарному объему обеих носителей:

$$\Omega(S^*, \hat{S}) = \Omega(c^*, c) = \frac{\mu(S^* \cap \hat{S})}{\mu(S^* \cup \hat{S})}. \quad (3)$$

Теперь наоборот,  $\Omega(c^*, \hat{c}) = 1$  при совпадении носителей  $S(c^*)$  и  $S(\hat{c})$ , но  $\Omega(c^*, \hat{c}) = 0$ , если они не имеют общих точек, а в качестве наилучшей оценки вектора  $\hat{c}$  логично взять вектор  $c^{opt} \in Q'$ , на котором достигается максимум функционала  $W$ .

### Алгоритмы минимизации эмпирического риска

Вопрос о границах возможного нередко возникает при решении задач математической физики. Классический пример: теория решения некорректных задач, в том числе и обратных задач гравиметрии, построена для функциональных пространств, но на практике реализуется для конечномерных [15, 19]. Идеализированные постановки интересны тем, что играют роль неких ориентиров и позволяют оценить, как близко предлагаемый подход (или метод) приблизился к порогу принципиально возможного. Так, концепция минимизации риска зачастую реализуется на практике как концепция минимизации эмпирического риска. Теоретически можно ставить вопрос о построении функции плотности  $\varphi(c)$  путем преобразования закона распределения помех  $\zeta$  в измерениях поля. Но на практике законы распределения помех неизвестны. К тому же при сложной структуре  $Q'$  фактически выполнить названное преобразование вряд ли возможно. В этом плане авторы могут поделиться собственным опытом. В работе [8] для случая линейной обратной задачи и помех с нулевым медианным значением такое преобразование приводится, но оно оказалось столь громоздким, что реализовать его удастся лишь при  $m$  порядка 4–6. Еще один вопрос: можно ли назвать хотя бы один класс  $M$ , используя который задачу поиска решения, минимизирующего риск, можно было бы сформулировать как некую условно-экстремальную задачу и к тому же предложить эффективный алгоритм ее решения? Класс однородных многогранников, у которых и аппроксимационные возможности неограниченны, и есть эффективные алгоритмы решения прямой задачи? Но, к сожалению, многогранник не определяется одним лишь набором координат его вершин, и это резко усложняет процедуру оптимизации, поскольку надо как-то следить в автоматическом

режиме за правильным обходом этих вершин. Конечно, предотвратить нежелательные эффекты можно путем закрепления части параметров модели [11], но в этом случае аппроксимационные возможности ее резко снижаются.

Согласившись, что свести проблему минимизации риска к некой глобальной условно-экстремальной задаче затруднительно, опустимся на уровень проблематики минимизации эмпирического риска  $R_0$ . Предположим, что, используя известные методы, удалось построить некоторое число  $N$  допустимых решений обратной задачи  $S^*(j) = S^*(c(j))$ ,  $c(j) = (c_{j,1}, c_{j,2}, \dots, c_{j,m})$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ . Множество, состоящее из этих решений, обозначим как  $Q_0$ , а множество векторов  $c(j)$  их параметров как  $Q'$ . Среди решений, которые объединены в множество  $Q_0$ , помимо «рядовых» – тех, что «просто» согласуются с априорными ограничениями, могут быть те, что дополнительно удовлетворяют какому-то скалярному критерию «оптимальности» (минимум невязки, максимум гладкости границ возмущающих тел). Но поскольку в каждом допустимом решении вся априорная информация учтена полностью, а природные распределения масс и распределения помех в измерениях вовсе не обязаны удовлетворять «математически удобным» критериям, то никакого предпочтения такие «оптимальные» решения не имеют. Излюбленным изречением авторов на этот счет является известный афоризм Дж. Тьюки: «оптимальность становится опасной, если ее принимать слишком всерьез». Как принято в подобных случаях, дискретное равномерное распределение вероятности

$$\varphi^*(c) = \frac{1}{N}, \quad c \in Q', \quad (4)$$

можно считать эмпирической оценкой плотности  $\varphi(c)$ . Тогда эмпирический риск есть оценка математического ожидания

$$R_0(S^*(j^*)) = R_0(c(j^*)) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Omega(c(j^*), c(j)) \quad (5)$$

погрешности  $\Omega$  решения  $c(j^*) \in Q'$ . Среди всех  $N$  найденных допустимых решений  $c(j^*) \in Q'$  ( $S^*(j^*)$ ) в качестве наилучшего берется то, на котором значение  $R_0$  минимально. В случае выигрыша с функцией (3) в качестве наилучшего выбирается решение, на котором достигается максимум функционала

$$W_0(S^*(j^*)) = W_0(c(j^*)) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Omega(c(j^*), c(j)). \quad (6)$$

Подготовительный, он же основной, этап реализации алгоритма минимизации эмпирического риска состоит в формировании представительного подмножества  $Q_0$  в рамках выбранного модельного

класса  $M$ . Не задаваясь целью монополизировать монтажный метод В.Н. Страхова [18] построения допустимых решений нелинейной обратной задачи гравirazведки рудного типа, нельзя не отметить его универсальные возможности в вопросе одновременного учета различной априорной информации. Модельным классом  $M$  для монтажного метода служат всевозможные объединения  $S_\alpha$  конечных элементов (простых геометрических фигур)  $\omega_k$ , конгруэнтных заданному телу  $\omega$  (кубу, например) и образующих замощение области  $D \subset \mathbf{R}^3$ , заведомо содержащей источники интерпретируемой аномалии. В компьютерной памяти любой носитель представлен множеством номеров элементов замощения  $k$ , составляющих этот носитель (собственно, это и есть здесь вектор  $c$ ). Размерность модели  $m$  становится известной лишь в конце работы алгоритма (одна из особенностей монтажного метода), а множество  $Q$  допустимых решений будет всегда конечно, хотя и чрезвычайно велико. Последние 20 лет можно смело назвать эпохой ренессанса монтажного подхода, за этот период ему посвящен не один десяток журнальных публикаций. Мы не будем останавливаться на деталях этого подхода, отослав читателя к ссылкам в работах [7, 13].

Остается один принципиальный момент – будет ли представительным подмножеством  $Q_0$  при том или ином принципе его формирования. У проблемы два аспекта: а) как обеспечить, чтобы это подмножество было достаточно мощным; б) как убедиться, что оно достаточно полно представляет собой все множество  $Q$ .

Что касается первого аспекта, то опыт показал: при решении практических задач средней сложности число вариантов интерпретации, построенных с помощью монтажных алгоритмов, может исчисляться многими десятками, а то и сотнями. И это, если использовать исключительно резервы самих монтажных алгоритмов. Но есть еще одна возможность продуцировать новые допустимые решения обратной задачи, беря за основу подмножество  $Q_0$  решений, найденных обычным путем (скажем, используя различные нулевые приближения). Она не привязана к особенностям метода построения множества  $Q_0$  и обнаружилась там, где – в силу сложившихся стереотипов – ее, казалось бы, не стоило ожидать. Всем знакомое изречение «ломать – не строить», обычно принимаемое за предостережение, в нашем случае обернулось хорошей подсказкой. Достаточно было остановить взгляд на том, что допустимые решения  $S_j^*$  из  $Q_0$ , построенные тем же монтажным методом, обычно доставляют невязки  $\epsilon_j$  подбора, меньшие максимально разрешенного  $\epsilon_0$ . Отсюда вытекает возможность путем дозированного

«разрушения» (то есть различных деформаций) носителя  $S_j^*$ , не заботясь о локальных ухудшениях невязки, породить новые и новые носители, пока невязка не «скатится» на предельно допустимое значение  $\epsilon_0$ . Ясно, что вычислительные затраты на продуцирование каждого такого нового решения будут минимальны. Что касается монтажных алгоритмов, то они не просто приспособлены к выполнению такого рода деформаций, но располагают для этого специальной операцией перекристаллизации [13]. То, что на указанную возможность прежде не обращалось внимания, легко объяснить. При традиционном подходе задача построения множества  $Q_0$  вообще не возникает. Стереотипные представления вообще не приветствуют осознанное ухудшение невязки подбора. На последних итерациях известные алгоритмы, не останавливаясь, проскакивают «рядовые» допустимые решения. Отмеченный стереотип игнорирует эти решения и заставляет алгоритм упрямо двигаться (уже непонятно зачем) к локальному экстремуму невязки.

Что касается второй подпроблемы, то ее, к сожалению, нельзя решить лишь за счет увеличения мощности множества  $Q_0$ . Не обладая возможностью построить все множество  $Q$ , вопрос о репрезентативности его подмножества  $Q_0$  становится непросто. Здесь основная роль отводится эвристикам и модельным расчетам. Впрочем, для случая, когда подмножество  $Q_0$  используется для построения областей  $D_1$  и  $D_2$ , о которых мы говорили, достаточно надежный метод построения репрезентативного подмножества  $Q_0$  найден [3].

Как отмечалось, важнейшая особенность монтажных алгоритмов состоит в возможности одновременного учета основных типов априорной информации, встречающихся в практике интерпретации данных гравirazведки. Конкретные способы их учета приведены в работах [3, 7, 13]. Однако на одном типе информации, имеющим прямое отношение к конструкции функционала риска, все же надо остановиться. Речь идет о свойствах помех  $\xi$  в измерениях поля. Функция плотности  $\varphi_1(\xi)$  нарушает равноправие решений из  $Q_0$ . Это обстоятельство вносит сложности в вычислительную схему минимизации риска, но позволяет существенно снизить неопределенность. С учетом помех геологического характера объективность задания какого-либо закона  $\varphi_1(\xi)$  можно ставить под сомнение. Но интерпретатор должен иметь возможность на свой «страх и риск» реализовать угодные ему предпосылки. Важно, что при минимизации эмпирического риска, когда множество  $Q_0$  построено, сделать это уже несложно. Действительно, пусть

$$\Delta \tilde{g}(X_l) = \Delta \hat{g}(X_l) + \xi_l, \quad l = 1, 2, \dots, L, \quad (7)$$

модель гравитационных измерений,  $\Delta\tilde{g}(X_l)$  – истинное поле в точке  $X_l$ ;  $\xi_i$  – реализации равноточной некоррелированной помехи  $\xi$  с заданной плотностью  $\varphi_1(\xi)$ ;  $\Delta g(c, X_l)$ ,  $c \in Q_0$ , – поле масс, заполняющих носитель, описываемый вектором параметров  $c$ . При условии, что это поле мало отличается от истинного, разность  $\Delta\tilde{g}(X_l) - \Delta g(c, X_l)$  можно считать фактическим значением помехи в  $l$ -м измерении. Соответственно,

$$\phi(c) = \prod_{l=1}^L \varphi_1(\Delta\tilde{g}(X_l) - \Delta g(c, X_l)) \quad (8)$$

оценка плотности вероятности события  $S(c) = \hat{S}$ . После чего функционал эмпирического риска приобретает следующий вид:

$$R_0(c(j^*)) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{iv} \phi(c(j)) \Omega(c(j^*), c(j)). \quad (9)$$

Когда множество допустимых решений уже построено, путем прямого вычисления (минуя решение экстремальной задачи) находим для каждого из них значение эмпирического риска (9). То из решений, на котором достигается минимальное значение  $R_0$ , принимается за наилучшее. Соответственно, в случае функционала выигрыша  $W_0$  в качестве наилучшего выбирается то допустимое решение, на котором достигается максимум этого функционала.

### Результаты вычислительного эксперимента

По мнению авторов, в теории интерпретации потенциальных полей отсутствует должная культура презентации результатов апробации предлагаемых алгоритмов, являющейся неотъемлемой частью обоснования состоятельности этих алгоритмов и побуждающей геофизика взять их на вооружение. Если руководствоваться тезисом: «любые тенденции, подмеченные по результатам разумно организованных массовых расчетов, подвержены случаю в значительно меньшей степени, чем результаты единичных расчетов», то складывается следующая картина. При фиксированном объеме априорной информации об источниках поля, точность решения обратной задачи по заданному алгоритму во многом зависит не столько от закона распределения помех, сколько от конкретных свойств выборки помех в измерениях поля. Любую конкретную выборку теоретически можно отнести к реализации помех при различных законах ее распределения. Качество отдельного варианта интерпретации не показатель достоинств или недостатков алгоритма. У создателя алгоритма, исход работы которого нельзя предугадать, всегда есть «палочка-выручалочка» – любую неудачу всегда

можно списать на теоретически существующую вероятность негативного исхода.

После этого уже не очень ясно, какая роль в демонстрации возможностей алгоритма может быть отведена единичному примеру. Если тот или иной алгоритм претендует на математическую корректность, то вроде бы и примеры ни к чему; доверяем же мы строгой формуле решения квадратного уравнения без контрольных расчетов. Но иное дело классические методы решения некорректных обратных задач. Их авторам необходимо, образно выражаясь, «усидеть на двух стульях». С одной стороны, надо не отступать от математических критериев ценности теоретического результата, для достижения которой любые абстрактные предпосылки допустимы. С другой – надо показать, что полученные результаты эффективны при решении прикладных задач, где свои условия и свои критерии ценности результата. Поэтому здесь не обходится без лукавства. Даже в модельных примерах невозможно воспроизвести условия (например, сходимость нормы помехи к нулю), на которых держится математическая состоятельность алгоритмов, гарантирующих сходимость. И когда дело доходит до их применения, строгие рассуждения как-то само собой улетучиваются, а остаются апелляция к здравому смыслу и субъективные оценки типа «как видим, имеет место хорошая согласованность решений» [12]. Такая метаморфоза еще могла бы быть понятна, если бы случилось так, что именно за счет строгости при построении метода для одних (идеализированных) условий удалось обеспечить наилучшее решение при использовании алгоритма в практических условиях. Но это не так. Оценивание качества результатов интерпретации данных полевых измерений, когда объективно нет возможности манипулировать выборками помех, могло бы состоять в следующем. Пусть  $S^{opt}$  – решение обратной задачи по любому методу. Если предположить, что при совокупных данных  $G$  информационная поддержка решения  $S^{opt}$ , будь оно истинным, примерно та же, что и самого решения  $\hat{S}$ , можно организовать масштабный вычислительный эксперимент с различными выборками случайных чисел в роли помех. При этом носитель  $S^{opt}$  считается неизвестным. Статистические выводы, которые будут сделаны в отношении  $S^{opt}$ , перенесем на неизвестное истинное решение  $\hat{S}$ .

Для большей наглядности проиллюстрируем суть рассмотренной концепции на 2D-модели геоплотностного разреза, включающего два интрузивных тела: хонолит основного состава с избыточной плотностью  $\delta_1 = 0,3 \text{ г/см}^3$  и лакколит среднего состава с плотностью  $\delta_2 = 0,2 \text{ г/см}^3$ . Аномалии силы тяжести  $\Delta g$  вычислены на горизонтальном профиле длиной

20 км в 41 точке с шагом 500 м. Амплитуда поля около 10 мГал (рис. 1).

Сеточная аппроксимация двухсвязного аномалиеобразующего объекта с использованием квадратных элементов  $\omega_k$  размером  $500 \times 500$  м создает поле, практически тождественное полю  $\Delta g$  исходной модели, что позволяет считать выбранный модельный класс источников аномалии адекватным реальности, а саму эту аппроксимацию отождествлять с истинным объектом. С целью имитации влияния помех (преимущественно геологической природы) точное поле отягощалось случайными числами с нестандартным законом распределения. Первоначально с помощью преобразования Бокса-Мюллера генерировалась нормально распределенная случайная помеха с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением (СКО) 0,2 мГал. Затем модули всех тех значений  $\zeta_i$  в сгенерированной выборке, которые превышают СКО, увеличивались в 3 раза, и теперь уже они принимались за значения  $\zeta_i$  помехи в  $i$ -м измерении аномалии. В результате таких манипуляций помеха перестает

быть центрированной и ее СКО начинает доходить примерно до 0,5 мГал. Это значение было взято как максимально разрешенная невязка модельного и наблюдаемого полей. Для ознакомления на рис. 2 приведены несколько графиков выборок помех.

Были выполнены расчеты для 200 вариантов имитации помех в «наблюдаемом» поле. В каждом варианте  $t$  построение множества допустимых решений обратной задачи осуществлялось с помощью монтажного метода В.Н. Страхова [18]. В качестве априорного ограничения на геометрию границы модельного носителя использовалось условие ее гладкости. Как известно, в монтажном методе начальным приближением служит любая совокупность элементов замощения – по одному элементу на каждое связанное парциальное тело в модели источников аномалии; причем эти элементы остаются принадлежать всем текущим приближениям к искомому допустимому носителю. Как показывает опыт, при двух различных начальных приближениях монтажный метод почти всегда «выходит» на два различных допустимых решения обратной задачи (если таковые вообще

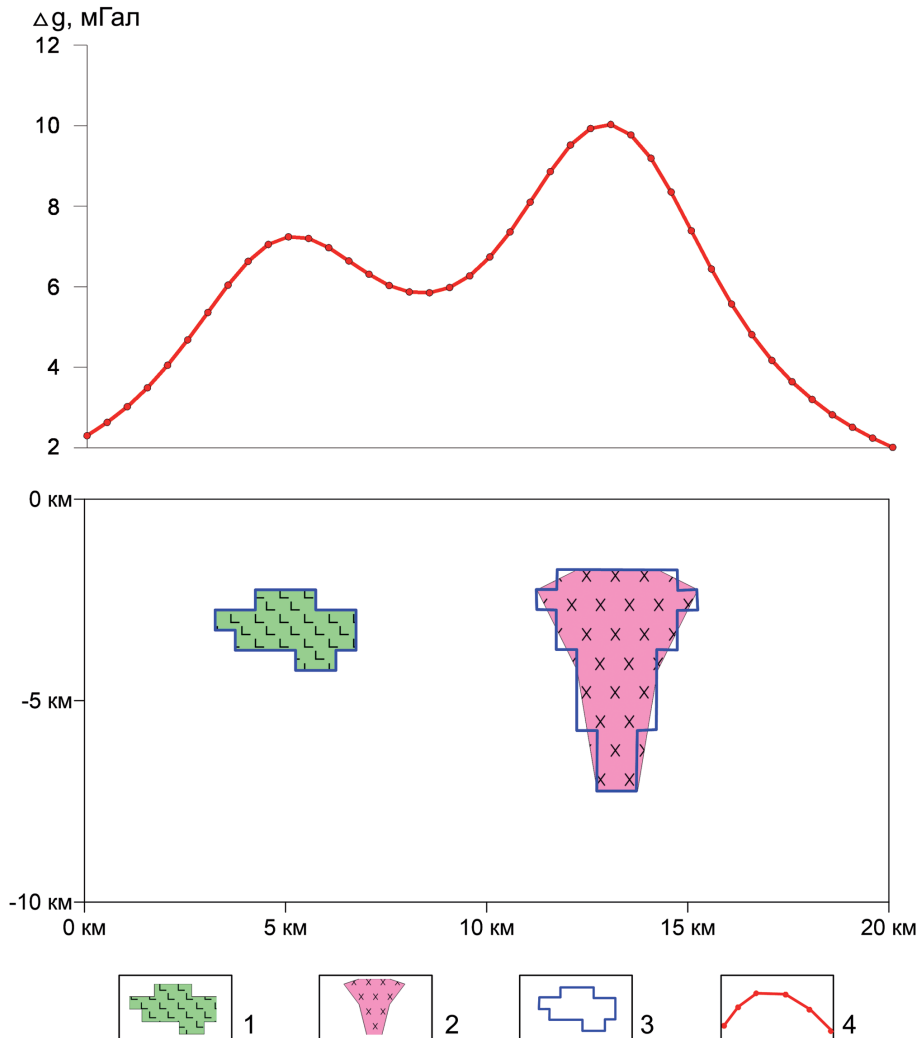


Рис. 1. Модель геоплотностного разреза: интрузии основного (1) и среднего (2) состава; их конечно-элементное представление (3) и гравитационное поле (4)



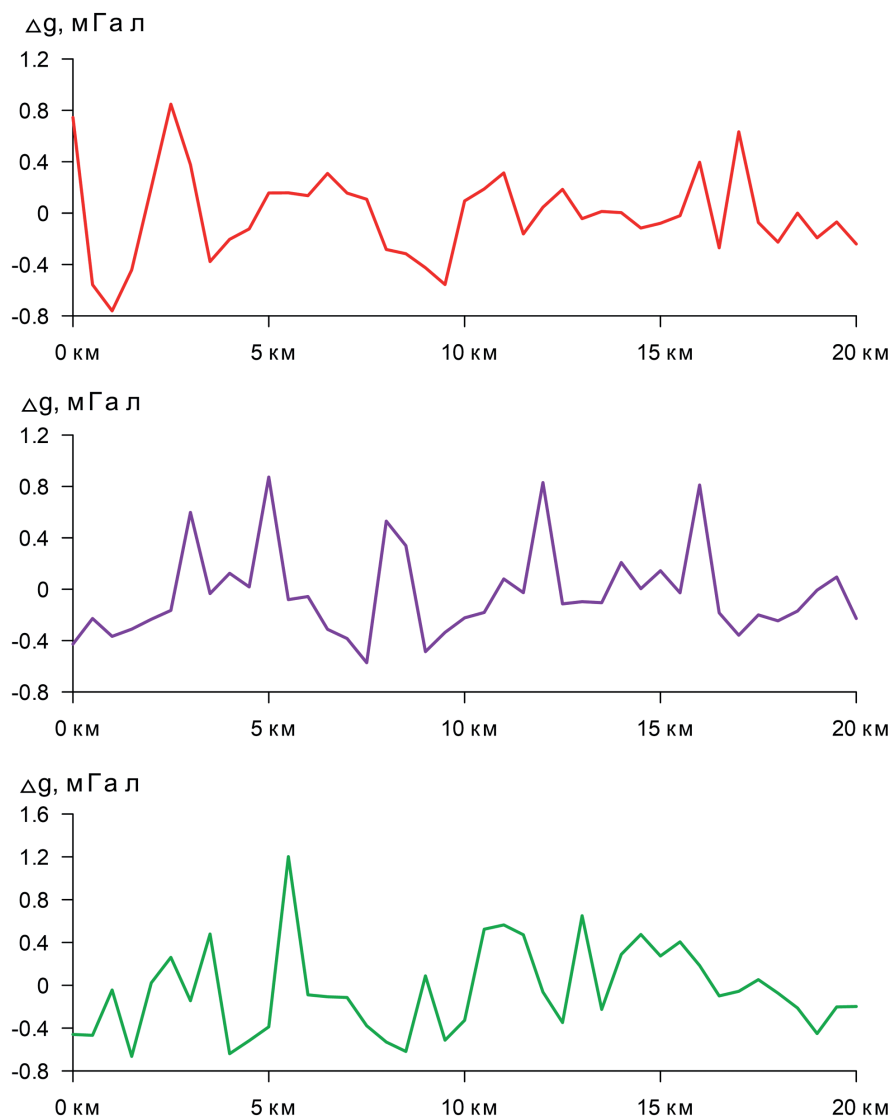


Рис. 2. Примеры помех, осложняющих «наблюдаемое» гравитационное поле

существуют при заданных начальных приближениях). Учитывая это, каждая очередная попытка найти новое допустимое решение обратной задачи начиналась с задания случайным образом местоположения пары элементов  $\omega_k$  (центров кристаллизации по терминологии В.Н. Страхова) в пределах достаточно широкой области, содержащей источники аномалии.

В среднем в каждом из двухсот вариантов решения обратной задачи с различными выборками помех в измерениях было найдено порядка 1850 допустимых вариантов  $S^*(j)$  интерпретации, которые, можно считать, относительно неплохо представляют собой все множество допустимых решений. На рис. 3 приводятся несколько допустимых решений для одного, случайно выбранного варианта  $t$ .

В качестве меры близости двух носителей (выигрыша)  $\Omega$  взят функционал (3). В каждом из двухсот вариантов  $t = 1, 2, \dots, 200$  с участием этого функционала по формуле (6) были рассчитаны функционалы  $W_0(S^*(j))$  для каждого из

допустимых решений  $S^*(j)$ , взятого в качестве претендента на наилучшее решение  $S_t^{opt}$ . То из допустимых решений, для которого оценка  $W_0$  математического ожидания выигрыша  $\Omega$  оказывается максимальной, берется за оптимальное (мы его обозначим как  $S_{1,t}^{opt}$ ). В каждом из вариантов  $t$  выделено решение  $S_{2,t}^{opt}$ , обеспечивающее минимальное значение невязки по сравнению с другими найденными в этом варианте допустимыми решениями. Также вычисляется фактическое качество  $\Omega(S_{1,t}^{opt}, \hat{S})$  решения, оптимального по максимуму выигрыша. Дополнительно вычисляется качество  $\Omega(S_{2,t}^{opt}, \hat{S})$  решения, оптимального по критерию невязки. Также вычисляется степень близости  $\Omega(S_{1,t}^{opt}, S_{2,t}^{opt})$  двух альтернативных, по-своему оптимальных решений. Минимально и максимально достигнутые значения названных показателей по всем двумстам вариантам, а также их средние значения и среднеквадратические отклонения (СКО) от среднего значения представлены в табл. 1.



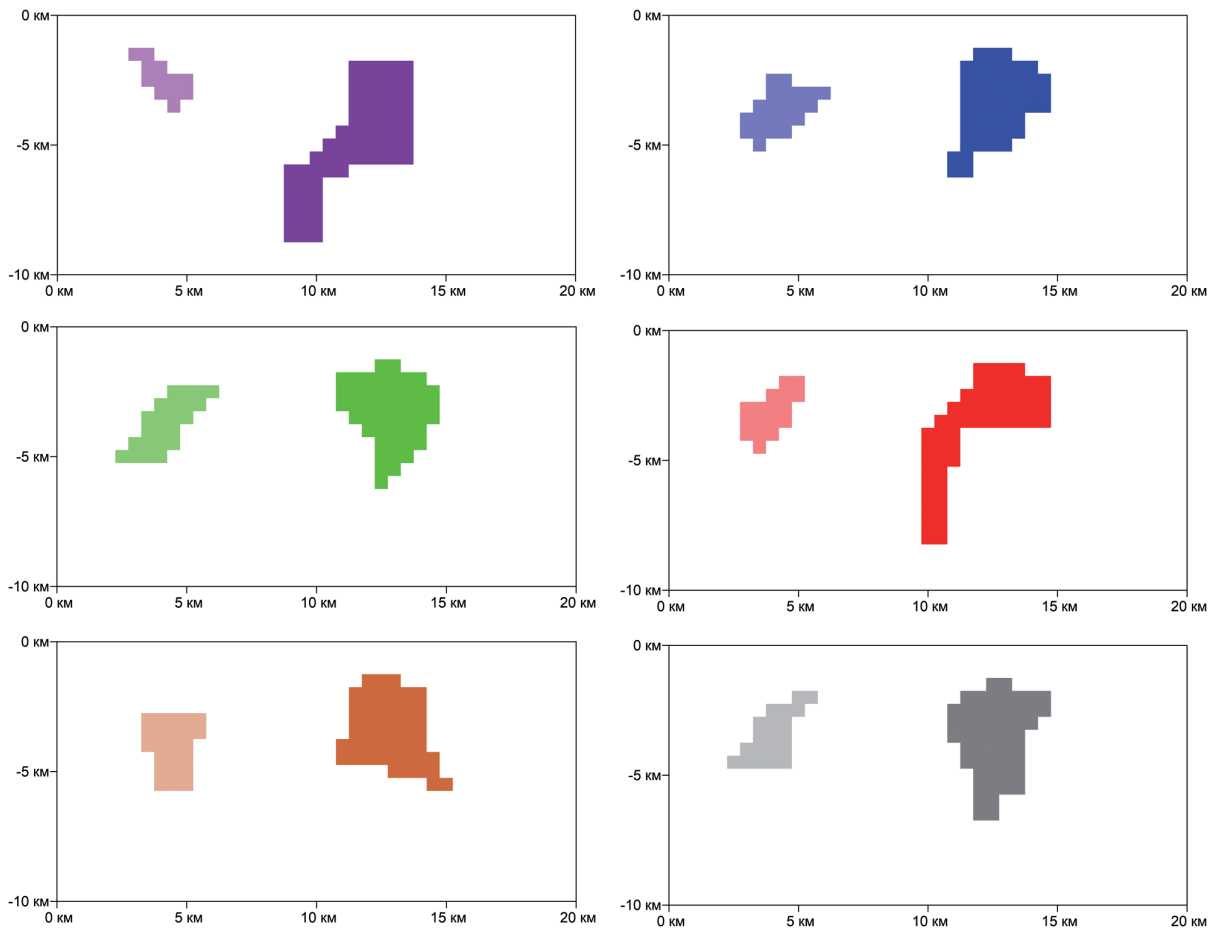


Рис. 3. Отдельные допустимые решения обратной задачи для одного из вариантов помех

Таблица 1

Показатели решений обратной задачи гравиразведки по 200 вариантам

Параметр	Минимум	Максимум	Среднее	СКО
$W_0(S_{1,t}^{opt})$	0,508	0,675	0,565	0,024
$\Omega(S_{1,t}^{opt}, \hat{S})$	0,340	0,622	0,508	0,052
$\Omega(S_{2,t}^{opt}, \hat{S})$	0,167	0,627	0,439	0,095
$\Omega(S_{1,t}^{opt}, S_{2,t}^{opt})$	0,212	0,727	0,489	0,107

Табличные данные совместно с приведенными ниже гистограммами (рис. 4) позволяют сделать следующие выводы:

1. В среднем оценка математического ожидания погрешности результатов интерпретации достаточно близка к фактической ошибке решения обратной задачи (относительная величина отклонения одного значения от другого всего порядка 10%). И это самый важный результат.
2. Фактическая точность решения обратной задачи по критерию максимума выигрыша в среднем превышает более чем на 10% точ-

ность решения по минимуму невязки (при той же априорной информации). Но не надо забывать, что предложенная здесь методика позволяет (в среднем) предсказать эту точность.

3. Как и ожидалось, решения, оптимальные по двум сравниваемым критериям, могут существенно различаться между собой.

Подкрепим эти выводы расчетами по одному из вариантов  $t$  (рис. 5, 6). «Сухие» цифры таковы:  $W_0 = 0,538$ ,  $\Omega(S_{1,t}^{opt}, \hat{S}) = 0,484$ ,  $\Omega(S_{2,t}^{opt}, \hat{S}) = 0,248$ ,  $\Omega(S_{1,t}^{opt}, S_{2,t}^{opt}) = 0,290$ .

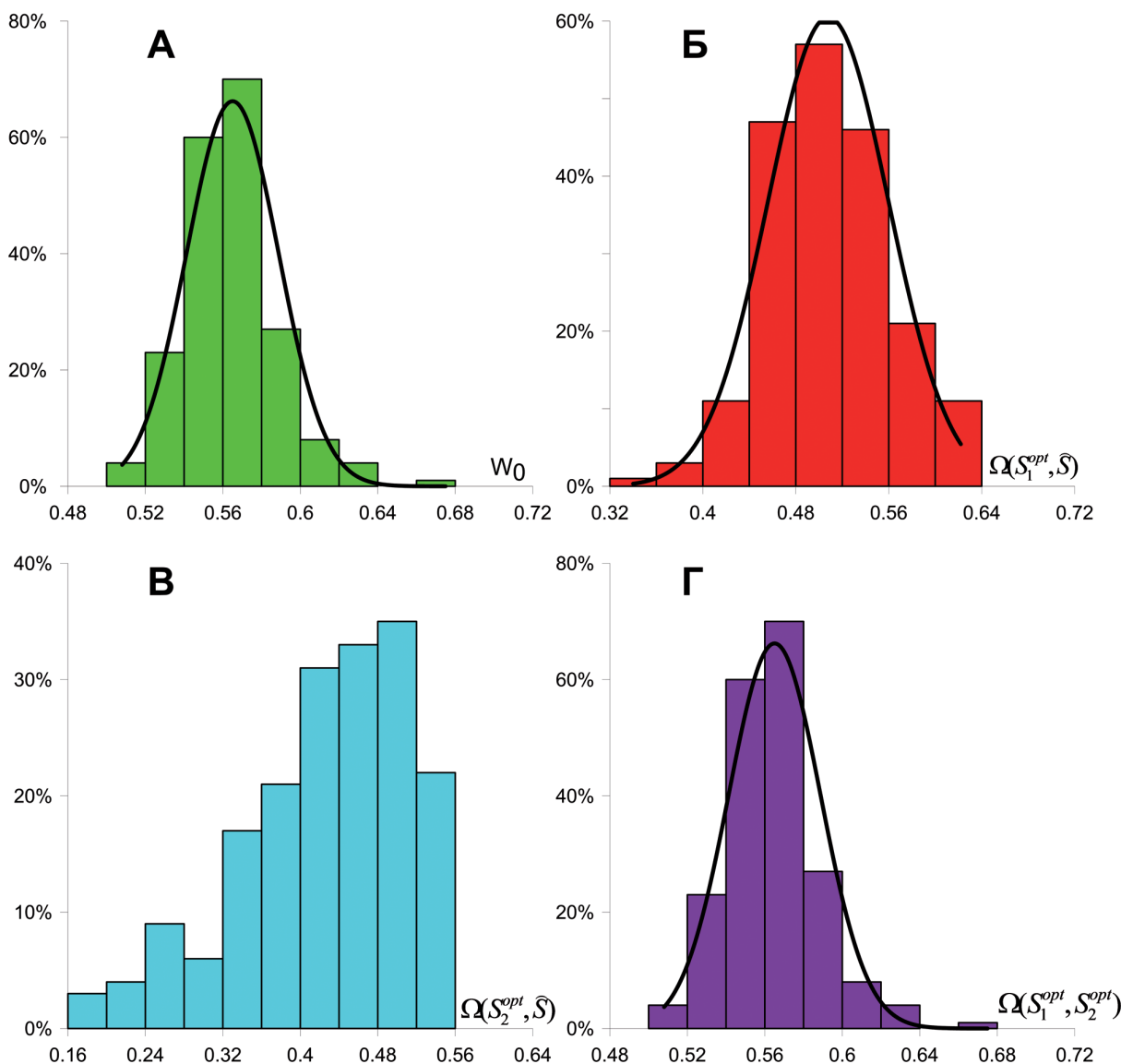


Рис. 4. Гистограммы параметров решений обратной задачи гравиразведки: А – выигрыш  $W_0$ ; Б – фактическое качество решения по максимуму выигрыша; В – фактическое качество решения по минимуму невязки; Г – мера близости решений по максимуму выигрыша и по минимуму невязки. Примечание: черным цветом показаны аппроксимирующие вариационные кривые, отвечающие закону Гаусса

В содержательном плане: часть пространства, являющаяся общим фрагментом истинного носителя масс и построенного модельного носителя, составляет около 65% области, занятой возмущающими массами. В оценке точности построенного решения  $S_{1,t}^{opt}$  с помощью функционала выигрыша  $W_0$  мы ошиблись примерно на 10%.  $W(S_{1,t}^{opt}, S_{2,t}^{opt})$ .

**Заклучение**

В настоящее время точность определения наблюдаемых значений силы тяжести составляет 0,005-0,015 мГал, что существенно расширило круг геологических задач, которые в принципе могли бы быть решены с использованием данных гравимет-

рической съемки. Тем более досадно, когда обнаруживается, что до сих пор математическая теория интерпретации потенциальных полей не смогла достаточно полно раскрыть внутренние резервы гравиразведки. Причины этого носят в основном субъективный характер.

В работе [3] приведены убедительные примеры, что современная математическая теория интерпретации гравитационных и магнитных полей буквально «нашпигована» противоречиями, природа которых в [3] обозначена как столкновение математических и геофизических интересов при выборе актуальных направлений исследований. Если противоречия, на которые обращал внимание

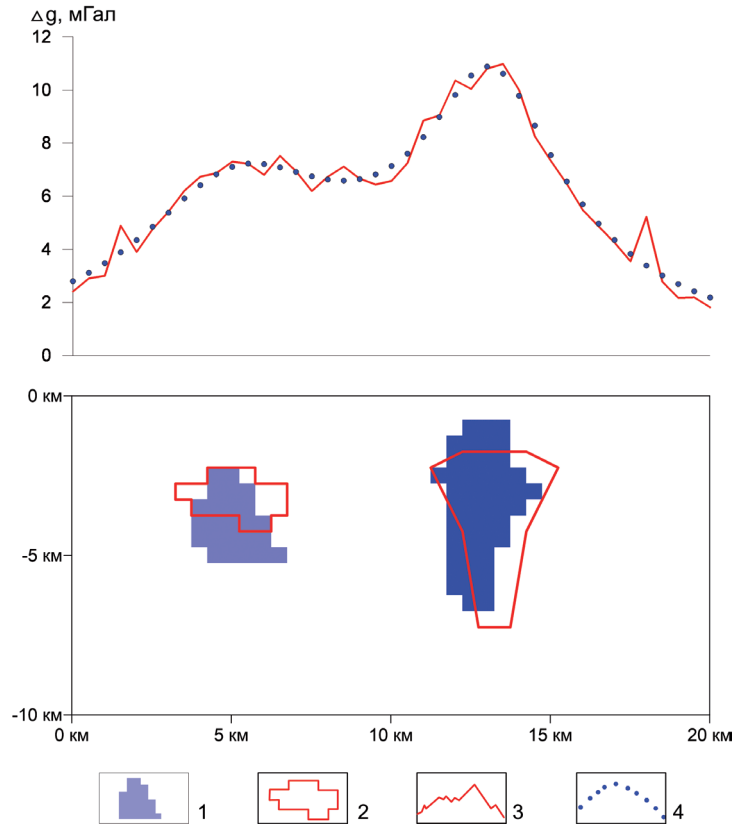


Рис. 5. Решение  $S_1^{opt}$  обратной задачи по максимуму функционала выигрыша  $W_0$ :  
 1 – аномалиеобразующие тела, составляющие решение  $S_1^{opt}$ ; 2 – истинные объекты;  
 3 – «наблюденное» поле; 4 – модельное поле. Примечание: невязка полей 3, 4 составляет 0,463 мГал

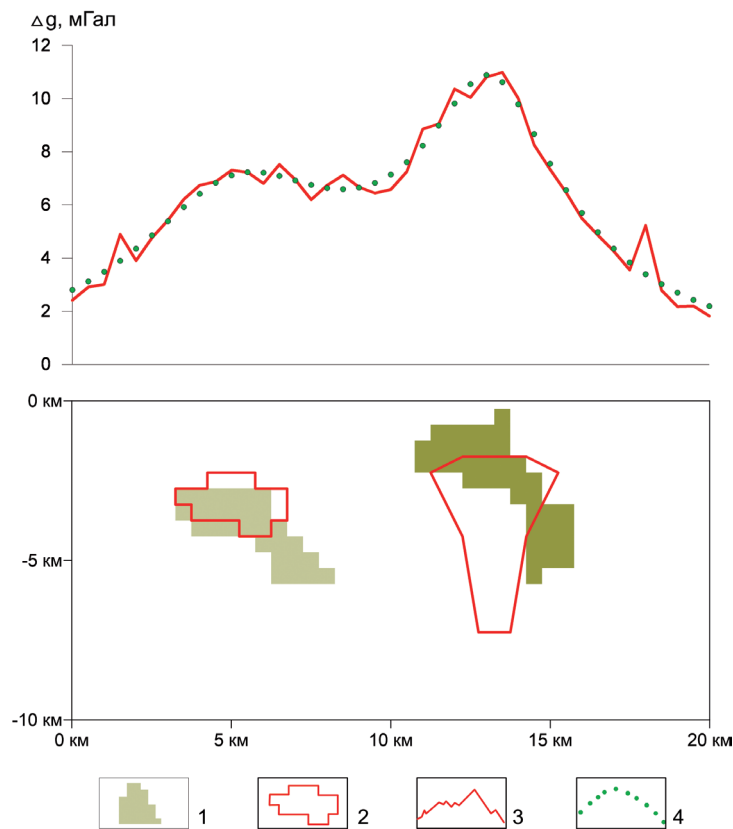


Рис. 6. Решение  $S_2^{opt}$  обратной задачи по минимуму невязки наблюдаемого и модельного полей:  
 1 – аномалиеобразующие тела, составляющие решение  $S_2^{opt}$ ; 2 – истинные объекты;  
 3 – «наблюденное» поле; 4 – модельное поле. Примечание: невязка полей 3, 4 составляет 0,444 мГал

В.Н. Страхов, обусловлены большей частью неадекватностью математических моделей интерпретации природным соотношениям и реалиям геофизической практики (к примеру, идеализация бесконечной плоской границы Земля-воздух), то в [3] речь идет в основном о дефектах методологии теории интерпретации, связанных с неоправданным доверием к тем обнадеживающим выводам, которые вытекают в математической теории решения некорректных обратных задач из виртуальных с точки зрения практики предпосылок (к примеру, стремления нормы помехи к нулю) и неоправданно задвигают на второй план актуальные направления исследований.

Предложенная в данной статье постановка обратной задачи есть также результат осмысления указанных противоречий. Это не первая статья авторов, где изложение материала ведется в контексте проблемы преодоления выявленных противоречий, что, безусловно, способствует более ясному пониманию роли и места предлагаемых подходов и отдельных алгоритмов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-05-01823А).

**Ключевые слова:** гравиразведка, интерпретация, обратная задача, источник поля, помеха, невязка полей, минимизация эмпирического риска.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М.А., Малишевский А.В. Некоторые аспекты общей теории выбора лучших вариантов // Автоматика и телемеханика. – 1981. – № 2. – С. 65-83.
2. Балк П.И. О надежности результатов количественной интерпретации гравитационных аномалий // Физика Земли. – 1980. – № 6. – С. 65-83.
3. Балк П.И. Столкновение геофизических и математических интересов – главный источник противоречий в современной теории интерпретации потенциальных полей // Геофизика. – 2000. – № 2. – С. 41-46.
4. Балк П.И. Несколько контрпримеров к стереотипам в теории интерпретации потенциальных полей // Геоинформатика. – 2013. – № 3. – С. 33-40.
5. Балк П.И. Скрытая эквивалентность алгоритмов решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии // Геоинформатика. – 2015. – № 2. – С. 36-43.
6. Балк П.И., Долгаль А.С. Детерминистские модели интерпретации для оптимизации местоположения и глубин заложения скважин при заверке гравитационных аномалий // Физика Земли. – 2015. – № 1. – С. 98-111.
7. Балк П.И., Долгаль А.С., Балк Т.В., Христенко Л.А. Конечноэлементные технологии интерпретации данных гравиразведки. Монтажный подход // Геофизические исследования. – 2012. – Т. 13. – № 3. – С. 18-34.
8. Балк П.И., Долгаль А.С., Мичурин А.В. Смешанный вероятностно-детерминистский подход к интерпретации данных гравиразведки, магниторазведки и электроразведки // Доклады РАН. – Т. 438. – № 4. – С. 532-537.
9. Балк Т.В. Об оценке надежности результатов количественной интерпретации гравитационных аномалий по методу призм при переменной плотности // Геология и геофизика. – 1981. – № 4. – С. 119-125.
10. Балк Т.В., Новоселова М.Р., Балк П.И., Турутанов Е.Х. О точности определения нижней границы геологического объекта по гравиметрическим данным // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1988. – № 3. – С. 81-86.
11. Булах Е.Г. Прямые и обратные задачи гравиметрии и магнитометрии. – К. : Наукова думка, 2010. – 463 с.
12. Васин В.В., Пересторонина Г.Я., Пруткин И.Л., Тимерханова Л.Ю. Решение трехмерных обратных задач гравиметрии и магнитометрии для трехслойной среды // Математическое моделирование. – 2003. – Т. 15. – № 2. – С. 69-76.
13. Долгаль А.С., Балк П.И., Деменев А.Г., Мичурин А.В., Новикова П.Н., Рашидов В.А., Христенко Л.А., Шархимуллин А.Ф. Использование метода конечных элементов при интерпретации данных гравиразведки и магниторазведки // Вестник КРАУНЦ. – 2012. – Т. 1. – № 19. – С. 108-127.
14. Долгаль А.С., Шархимуллин А.Ф. Повышение точности интерпретации моногеничных гравитационных аномалий // Геоинформатика. – 2011. – № 4. – С. 49-56.
15. Старостенко В.И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. – К. : Наукова думка, 1978. – 228 с.
16. Страхов В.Н. Геофизика и математика // Физика Земли. – 1995. – № 12. – С. 4-23.
17. Страхов В.Н. Новая теория регуляризации систем линейных алгебраических уравнений с приближенно заданными векторами в правых частях и ее использование при решении задач гравиметрии и магнитометрии // Геофизический журнал. – 2003. – Т. 25. – №1. – С. 8-10.
18. Страхов В.Н., Лапина М.И. Монтажный метод решения обратной задачи гравиметрии // Доклады АН СССР. – 1976. – Т. 227. – № 2. – С. 344-347.
19. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М. : Наука, 1979. – 284 с.