

УДК [550.8.053+550.8.056]/681.3

© С.В. Мицын

**С.В. Мицын**

# О ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИРАЗВЕДКИ



## Введение

В прикладной геофизике важное место занимают численные методы построения геофизических сеточных моделей распределения параметра через инверсию полей с помощью преобразований Фурье [7, 8]. В основании методов лежат отношения между полями и распределениями физического параметра в виде интегральных уравнений, то есть в непрерывном виде. В то же время численные методы основаны на использовании дискретных, сеточных моделей. Как правило, их численные реализации основаны на постановке в прямое соответствие непрерывному преобразованию Фурье (НПФ) его дискретного аналога (ДПФ), что не всегда допустимо. Такое конструирование численных реализаций приводит к тому, что исследователи сталкиваются с рядом проблем, прежде всего – с проблемой нетождественности оператора – композиции обратного и прямого преобразований.

В данной статье авторы рассматривают эту проблему на примере одной конкретной задачи постановки распределения эквивалентных плотностей гравитационному полю (первой производной потенциала), основанной на фильтрации поля [7]. Численная реализация такой постановки, в частности, включена в компьютерную систему ГИС INTEGR0. Рассмотрены источники проблем этого метода и его реализации, а также предлагается способ исправления проблем, приводящий к новому (видоизмененному) методу инверсии.

## Теоретические основы метода

Теоретические основы метода изложены в [3]. Так как цель данной работы – численная реализация на прямоугольных сеточных моделях, авторы опускают некоторые шаги, необходимые при строгом изложении. Например, доказательство существования Фурье образов не требуется – дискретные преобразования Фурье (ДПФ) существуют для любой конечной сеточной модели. Для более строгого доказательства авторы рекомендуют обратиться к [3].

Определим  $g(x, y, z)$ :  $g \in \mathfrak{G}$  – распределение эффективной плотности в нижнем полупространстве,  $\mathfrak{G}$  – пространство распределений плотностей,  $u(x, y)$ :  $u \in \mathfrak{U}$  – поле (первая вертикальная произ-

водная гравитационного потенциала, измеренная на уровне  $z = 0$ ).

Поле, соответствующее распределению плотностей, выражается в виде интегрального уравнения:

$$u(x, y) = \iiint_V g(x, y, z) k(x - x_0, y - y_0, z) dV, \quad (1)$$

где  $dV = dx dy dz$ , а  $k(x, y, z) = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ .

Задачу можно разбить на две части. Для этого перепишем тройной интеграл через одинарный по  $dz$  и двойной по  $dx dy$ :

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^0 dz \iint g(x, y, z) k(x - x_0, y - y_0, z) dx dy.$$

Внутренний интеграл – двумерная свертка по осям  $OX$  и  $OY$ . Обозначим два семейства функций двух переменных следующим образом:  $g_z(x, y) = g(x, y, z)$  и  $k_z(x, y) = k(x, y, z)$  (в дальнейшем индекс  $z$  у функций будем опускать). Введем обозначение  $\dot{u}$ :

$$\begin{aligned} \dot{u}(x_0, y_0, z) &= \{ \langle g_z | k_z \rangle \} (x_0, y_0) = \\ &= \iint g_z(x, y) k_z(x - x_0, y - y_0) dx dy. \end{aligned}$$

Тогда:

$$u(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^0 \dot{u}(x_0, y_0, z) dz.$$

Внешний интеграл можно рассматривать как скалярное произведение вектора (функции одной переменной)  $\dot{u}_{x_0, y_0}(z) = \dot{u}(x_0, y_0, z)$  и  $f(z) = 1$  (единицы) по оси  $OZ$ :

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) &= \int_{-\infty}^0 \dot{u}_{x_0, y_0}(z) dz = (\dot{u}_{x_0, y_0}, 1)_z = \\ &= (\langle g | k \rangle_{xy}, 1)_z \end{aligned}$$

( $z$  обозначает переменную (ось  $OZ$ ) интегрирования). Для удобства введем оператор  $S$ :  $S\dot{u}_{x_0, y_0} = (\dot{u}_{x_0, y_0}, 1)_z$  и оператор прямой задачи  $A$ :  $Ag = S\langle g | k \rangle_{xy}$ , и тогда  $u = Ag$ .

Вопросы, связанные с корректностью строгой постановки задачи инверсии, строго исследованы в [4]: постановка обратной задачи в виде поиска оператора  $A^{-1}$  некорректна. Но можно наложить достаточные теоретические ограничения на функции (существование преобразования Фурье и др.), не ограничивая практическую область применения метода. В статье авторы подразумевают соответствующие ограничения, жертвуя строгостью изложения.

С помощью преобразований Фурье избавимся от двойного интеграла. Обозначим  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{x,y \rightarrow v_x, v_y}$  – двумерное преобразование Фурье, в непрерывном случае  $\mathcal{F}f: [\mathcal{F}f](v_x, v_y) = \iint f(x, y) e^{-j2\pi(xv_x + yv_y)} dx dy$ , и  $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}_{v_x, v_y \rightarrow x, y}^{-1}$  – обратное преобразование Фурье. Обозначим  $U = \mathcal{F}u$ ,  $G = \mathcal{F}g$ ,  $K = \mathcal{F}k$ . Заметим, что если для некоторых функций  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$  и  $f_3(z)$  справедливо  $f_3 = f_1 f_2$  (то есть  $f_3(z) = f_1(z) f_2(z)$ ), то  $Sf_3 = Sf_1 f_2 = (f_1, f_2)_z$ . Тогда по теореме о свертке, если существует преобразование Фурье  $U = \mathcal{F}u$ , то справедливо следующее соотношение:

$$u = Ag \Rightarrow U(v_x, v_y) = \int_{-\infty}^0 G(v_x, v_y, z) K(v_x, v_y, z) dz = (G, K)_z.$$

Зафиксируем частоты  $v_x, v_y$ . Задача сводится к тому, чтобы найти такой вектор (функцию по  $z$ )  $G(z) = \bar{G}$ , что его скалярное произведение с вектором  $K(z) = \bar{K}$  дает скаляр  $U$ . Из основ линейной алгебры понятно, что таких векторов бесконечно много. Каждый вектор  $\bar{G}$  равен векторной сумме параллельной и перпендикулярной к  $\bar{K}$  части:  $\bar{G} = \bar{G}_{||} + \bar{G}_{\perp}$ , где  $\bar{G}_{||} = \alpha \bar{K}$  и  $\bar{G}_{\perp} \cdot \bar{K} = 0$ . То есть, существует какой-то  $\bar{G}_{||}$ , что  $\bar{G}_{||} \cdot \bar{K} = U$ , и подпространство  $\{\bar{G}_{\perp}\}$  такое, что  $A[\mathcal{F}^{-1} \bar{G}_{\perp}] = 0$ . Из  $(\alpha \bar{K} \cdot \bar{K}) = \alpha(\bar{K} \cdot \bar{K}) = U$  получаем  $\alpha = \frac{U}{(\bar{K} \cdot \bar{K})}$  и:

$$\bar{G}_{||} = \frac{U}{(\bar{K} \cdot \bar{K})} \bar{K},$$

$$\bar{G} = \frac{U}{(\bar{K} \cdot \bar{K})} \bar{K} + \bar{G}_{\perp}.$$

Подпространство возможных значений для  $\bar{G}_{\perp}$  (обобщенное для всех частот) задает ядро прямого преобразования и все богатство множества эквивалентных решений и сложность проблемы скрытой эквивалентности. К сожалению, оно имеет спектральную форму, поэтому судить о  $\{g_{\perp} = \mathcal{F}^{-1} \bar{G}_{\perp}\}$  довольно сложно.

Возьмем произвольную функцию  $\psi \in \mathfrak{G}$ . Справедливо следующее центральное для метода обращения поля соотношение:

$$\forall \psi \in \mathfrak{G}, \bar{\Psi} = \mathcal{F}\psi: [\forall v_x, v_y: (\bar{\Psi}, \bar{K})_z \neq 0] \Rightarrow \Rightarrow \left( \frac{U}{(\bar{\Psi}, \bar{K})_z} \bar{\Psi}, \bar{K} \right)_z = U. \quad (2)$$

То есть,  $u = A \left[ \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{U}{(\Psi, K)_z} \Psi \right) \right]$ . И можно утверждать, что  $g_{\psi} = \mathcal{F}^{-1}(G_{\psi}) = \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{U}{(\Psi, K)_z} \Psi \right]$  – одно из эквивалентных распределений эффективной плотности. Обозначим  $A_{\bar{\Psi}}^{-1} u = \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\mathcal{F}u}{(\Psi, K)_z} \Psi \right)$ . Оператор  $A_{\bar{\Psi}}^{-1}$  в некотором смысле «обратный» для  $A$ :  $AA_{\bar{\Psi}}^{-1} u = u$ , но в общем случае не обязательно выполняется  $A_{\bar{\Psi}}^{-1} Ag = g$ . Далее для про-

стоты изложения мы будем называть оператор  $A_{\bar{\Psi}}^{-1}$  обратным.

Обозначим  $\varphi_{\psi} = \mathcal{F}^{-1} \Phi_{\psi} = \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\Psi}{(\Psi, K)_z} \right)$ . Заметим, что  $u = S \langle \langle u | \varphi_{\psi} \rangle | k \rangle$ , то есть ядра свертки  $\varphi_{\psi, z}(x, y) = \varphi_{\psi}(x, y, z)$  в некотором смысле обратны ядрам свертки  $k_z(x, y) = k(x, y, z)$ .

Зафиксируем  $v = (v_x, v_y)$ . Тогда в соотношении (2) легко узнать центральную проекцию: вектор (функция)

$$\bar{G}_{\bar{\Psi}}(z): \bar{G}_{\bar{\Psi}} = \frac{U}{(\bar{\Psi} \cdot \bar{K})} \bar{\Psi}$$

(где  $\bar{\Psi}(z) = \Psi(v_x, v_y, z)$ ,  $U = U(v_x, v_y)$ ,  $\bar{K}(z) = K(v_x, v_y, z)$ ) имеет то же направление, что и  $\bar{\Psi}(z)$ , но длину такую, при которой  $\mathcal{F}^{-1} \Phi_{\psi}$  принадлежит подпространству эквивалентных решений  $\mathfrak{Z}u$ :  $[\forall g' \in \mathfrak{Z}u] Ag' = u$ . Поэтому авторы в дальнейшем называют вектор  $\Psi$  направляющим, а данный метод инверсии данных гравиметрии – спектральной центральной проекцией. Очевидно, проекция не определена, если  $\psi$  принадлежит ядру оператора  $A$ .

Необходимо прояснить момент с точкой разложения Фурье  $v_x, v_y = (0, 0)$ , соответствующей нулевой частоте. Нулевая частота – суть постоянное слагаемое в латеральной форме. Учитывая, что исходные данные  $u$  даются с точностью до постоянного слагаемого (которое принадлежит фону), а  $g_{\psi}$  – эффективная плотность, то можно принять  $U(0, 0) = 0$ ,  $G_{\psi}(0, 0, z) = 0$  и не учитывать значения в этой точке в вычислениях.

### Численное решение и его проблемы

Численное решение подразумевает дискретизацию. Стандартный способ – квадрирование – выражается в замене интегралов на суммы: теперь  $\dot{g} = \dot{g}(x_k, y_j, z_i)$ ,  $\dot{u} = \dot{u}(x_k, y_j)$  и  $\dot{k} = \dot{k}(x_k, y_j, z_i)$  задаются значениями в узлах  $\dot{\Omega} = \{x_k = x_0 + k\Delta x\} \times \{y_j = y_0 + j\Delta y\} \times \{z_i = z_0 + i\Delta z\}$  сетки, где  $i \in \{0, 1, \dots, n_z - 1\}$ ,  $j \in \{0, 1, \dots, n_y - 1\}$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, n_x - 1\}$ ,  $z_0 < \frac{\Delta z}{2}$ ,  $\Delta z < 0$ . Для простоты далее рассматриваем изометричную сетку:  $\Delta x = \Delta y$ . В таком случае свертка непрерывная заменяется на дискретную, а скалярное произведение функций – на скалярное произведение конечномерных векторов. Для векторов  $v_1(x_k, y_j, z_i)$  и  $v_2(x_k, y_j, z_i)$ :  $[(v_1 | v_2)](x_{k,0}, y_{j,0}) = \sum_{j,k} v_1(x_k, y_j, z_i) v_2(x_k - x_{k,0}, y_j - y_{j,0}, z_i)$  и  $[(v_1, v_2)_z](x_k, y_j) = \sum_i v_1(x_k, y_j, z_i) v_2(x_k, y_j, z_i)$ .

Дискретные преобразования Фурье имеют следующий вид:

$$[\mathcal{F}f](v_x, v_y) = \frac{1}{\sqrt{n_x n_y}} \sum_{k,j} f(x_k, y_j) e^{-i2\pi(x_k v_x + y_j v_y)},$$

причем Фурье-образ  $\mathcal{F}f$  функции  $f$  определен в точках  $(v_x, v_y) \in \{k/n_x \Delta x\} \times \{j/n_y \Delta y\}$ .

Если взять циклическую свертку, то при замене в отношении (2) непрерывных функций на их дискретные аналоги оно остается справедливым. Иначе, при использовании линейной (ациклической) свертки, так как  $v_1$  и  $v_2$  не определены в точках вне сетки  $\Omega$ , используется либо экстраполяция данных гравиметрии, либо в качестве значений функций в этих точках берется ноль; при этом проявляются краевые эффекты – в точках, близких к краю сетки, значения  $A_{\psi}^{-1} A \dot{u}$  сильно отличаются от  $\dot{u}$ .

Авторское программное численное решение в [7], используемое, в том числе, в программном продукте ГИС INTEGRO, основано на аппроксимации непрерывных соотношений аналогичными дискретными. То есть, непрерывное преобразование Фурье (НПФ) заменяется на дискретное (ДПФ), а  $\Phi_{\psi} = \Phi_{\psi}(v_x, v_y, z)$  для некоторых  $\Psi = (v_x, v_y, z)$  выведено в замкнутой форме (в виде элементарной функции) и используется в аналитическом виде. Имеются следующие проблемы такой аппроксимации: а) периодичность ДПФ; б) особенности соответствия ДПФ и НПФ и, как следствие, разница между видом  $K$  в дискретном и непрерывном случаях; в) конечность численной модели среды.

**Периодичность ДПФ**

Периодичность ДПФ является известной проблемой: свертка, выраженная через ДПФ, также является периодической, хотя оператор  $A$  прямой задачи, построенный исходя из законов физики, никакой периодичности не содержит. Если функции  $\varphi_{\psi,z}(x, y)$  оказываются локализованными по латерали (имеют сильно ограниченный саппорт), то эта проблема частично решается за счет экстраполяции исходных данных. На практике эта особенность ДПФ дает неточность решения по краям («краевые эффекты»). Авторы предлагают свой авторский метод экстраполяции (продолжения поля) [6]. При использовании этого метода поле также получается периодическим, что сильно уменьшает вклад краевых эффектов. Если поле содержит сильный направленный тренд, то поле следует трансформировать – например, аппроксимировать тренд полиномом и вычесть его (тренд-анализ [1]).

Две другие проблемы требуют большего внимания.

**Соответствие НПФ и ДПФ**

Вид дискретного преобразования Фурье хорошо известен, но из него не до конца понятна природа соответствия непрерывных и дискретных преобразований Фурье. В области обработки сигналов хорошо известно, что можно выразить ДПФ функции через ее НПФ, простое описание содержится в [5]. Обозначим символом  $D$  оператор дискретизации:  $\hat{f} = Df$ , если  $\Omega$  – область определения  $\hat{f}$  и  $\hat{f}(x_k, y_j, z_i) = f(x_k, y_j, z_i)$ . Тогда для любой действительной функции  $f$  имеет место  $\mathcal{F}Df = D(\mathcal{F}f|H)$ , где  $H(v_x, v_y) = H(v_x)H(v_y)$ , а  $H(v) = e^{-j2\pi v(n-1)/n} \frac{\sin(\pi v)}{\sin(\pi v n)}$ ,  $n$  – количество отсчетов дискретизации вдоль оси. То есть операторы  $D$  и  $\mathcal{F}$  не коммутативны по отношению друг к другу – их «нельзя» менять местами. Данный эффект называется наложением спектра [2], его можно пояснить, посмотрев на вид  $|H(v)|$  (рис. 1).

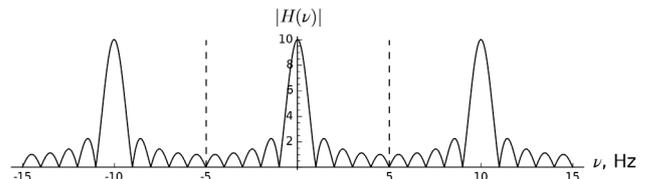


Рис. 1. Модуль ядра свертки  $|H(v)|$  в ДПФ дискретизированной в 10 отсчетах функции, одномерный случай; пунктирными линиями обозначена частота Найквиста

Fig. 1. Absolute value of convolution kernel  $|H(v)|$  of DFT of 10 samples of function, 1-D case

Для простоты рассмотрим одномерное ДПФ. Каждый отсчет ДПФ «ведет себя» как фильтр частот для спектра «изначальной» непрерывной функции (до дискретизации),  $H(v)$  – суть импульсный отклик в частотном диапазоне 0-го отсчета, а импульсный отклик отсчета  $i$  находится путем смещения графика на  $i$  Гц влево или  $(n - i)$  Гц вправо.

Для конкретного отсчета  $i$  можно поставить в соответствие частоту  $v_i = \min\{|v|: H(v) = \max_{v'} H(v')\}$ , и именно эту частоту часто используют для обозначения отсчета. Например, нулевой отсчет можно обозначать частотой  $v = 0$  Гц, первый отсчет –  $v = 1$  Гц (или угловой частотой  $\omega = 2\pi$ ). Чтобы в этом обозначении был смысл, необходимо, чтобы амплитуды частот выше частоты Найквиста (на графике – левее и правее интервала, ограниченного пунктирными линиями) были несущественно малы. Тогда можно сказать, что ДПФ «хорошо» аппроксимирует амплитуды нижнего спектра. Если же, напротив, частоты выше частоты Найквиста существенно велики, то они суммируются с частотами ниже частоты

Найквиста, и тогда аппроксимация  $\mathcal{F}Df \approx DFf$  становится сильно искаженной.

На практике, наложение спектра вносит искажения в операторе прямой задачи в ядре свертки  $k$  для малых глубин  $z$ :  $z < c\Delta x$ , а  $c$  – некоторая константа, зависящая от требуемой точности аппроксимации дискретной функции  $K$  непрерывной  $K$ ; авторы считают  $c \approx 2$ . Соответственно, оператор обратной задачи, представленный, например, в [8] в аналитическом виде, также искажен.

**Конечность численной модели среды**

Дискретная модель среды (модель плотностей) задается набором значений  $\dot{g}(x_k, y_j, z_i)$  на регулярной прямоугольной сетке  $\dot{\Omega}$ . Для его использования в интегральных уравнениях необходимо увязать данные с непрерывной средой. Чаще всего используется квадратурный метод с  $g(x, y, z) = \dot{g}(x, y, z)$ . Также можно использовать метод конечных объемов: каждой точке  $(x, y, z) \in \dot{\Omega}$  ставится в соответствие объем (параллелепипед, брус)

$$V(x, y, z) = \left\{ (x', y', z') \mid x - \frac{\Delta x}{2} < x' < x + \frac{\Delta x}{2} \wedge y - \frac{\Delta y}{2} < y' < y + \frac{\Delta y}{2} \wedge z - \frac{\Delta z}{2} < z' < z + \frac{\Delta z}{2} \right\},$$

значения плотностей принимается  $\forall (x, y, z) \in \dot{\Omega}$ ,  $\forall (x', y', z') \in V(x, y, z) \ g(x', y', z') = \dot{g}(x, y, z)$ , а в интегральном уравнении используется интеграл по объему  $\dot{V} = \cup_{(x,y,z) \in \dot{\Omega}} V(x, y, z)$ .

В обоих случаях, значения  $g$  не заданы в точках, координата  $z$  которых находится вне интервала  $Z = (z_0 - \frac{\Delta z}{2}, z_0 + (n_z - 1)\Delta z + \frac{\Delta z}{2})$ , но в уравнении (1) интеграл по оси  $OZ$  берется в интервале  $(0, \infty)$ . Если поставленная цель заключается в описании измеренной поверхности  $u$  только через набор данных  $\dot{g}$  и  $\dot{\Omega}$ , то необходимо принять  $g(x, y, z) = 0$  для  $z \notin Z$ . Тогда для использования результатов, полученных в непрерывном случае, в численной реализации необходимо, чтобы  $\Psi(v_x, v_y, z) = 0$  для  $z \notin Z$ . Игнорирование этого факта ведет к еще большим искажениям в результате обратного оператора.

С другой стороны, в дискретизированном случае можно легко выразить  $\dot{u}$  через интеграл по объему  $\dot{V}$ , но тогда очень сложно указать вид  $\Phi_\Psi$  в замкнутой форме, как это сделано в [8], так как он зависит, в том числе, и от выбора параметров сетки  $\dot{\Omega}$  (глубина, шаг по глубине, количество слоев).

**Обусловленность инверсии**

Обусловленность задачи выражает влияние ошибки измерения данных. Перепишем выражения для прямого и обратного операторов в опера-

торном виде. Введем следующие обозначения операторов:  $Q(\dot{U}) = \dot{U}\dot{\Phi}_\Psi$ , и  $P(\dot{G}) = (\dot{G}, \dot{K})_z$ .

Тогда исследуемые операторы:

$$A_\Psi^{-1}[\dot{u}] = \mathcal{F}^{-1}[Q([\mathcal{F}[\dot{u}]])], \dot{u} \in \dot{\mathcal{U}}, \text{ и } A[\dot{g}] = \mathcal{F}^{-1}[P([\mathcal{F}[\dot{g}]])], \dot{g} \in \mathfrak{G}_\Psi = \{A_\Psi^{-1}[\dot{u}] \mid \forall \dot{u} \in \dot{\mathcal{U}}\}.$$

Обусловленность линейного оператора выражается в виде числа обусловленности [4]:

$$k(A) = \|A\| \|A_\Psi^{-1}\|, \tag{3}$$

где  $\|A\| = \max_{\|\dot{x}\|} \frac{\|A\dot{x}\|}{\|\dot{x}\|}$  – норма оператора, вектор  $\dot{x}$  принадлежит области определения соответствующего оператора, а норму вектора берем  $\|\dot{x}\| = \|\dot{x}\|_2$ . Так как матрицы операторов не квадратные,  $k(A)$  нельзя выразить через собственные числа, так что надо рассмотреть каждый оператор по отдельности. Так как операторы преобразования Фурье унитарные,  $k(A) = \|P\| \|Q\|$  и нас интересуют нормы операторов  $P$  и  $Q$ .

Заметим, что для оператора  $Q$  элементы  $Q\dot{U}$  не зависят от элементов  $\dot{U}$  с отличными индексами  $v_x, v_y$ .

Обозначим:  $\delta_{v_x,0,v_y,0}(v_x, v_y) = \left[ \frac{1}{n_x n_y} \mathcal{F} \left( e^{i2\pi(x_k v_{x,0} + y_j v_{y,0})} \right) \right] (v_x, v_y)$  – вектор с одним ненулевым элементом с индексом  $(v_x, v_y)$  и значением 1. Очевидна ортогональность векторов  $\{Q(\delta_{v_x,0,v_y,0})\}$ , из которой вытекает:

$$\|Q\| = \max_{v_x, v_y} \frac{\|Q(\delta_{v_x, v_y})\|}{\|\delta_{v_x, v_y}\|} = \max_{v_x, v_y} \|Q(\delta_{v_x, v_y})\|.$$

Оператор  $P$  имеет то же свойство, но проблема в области определения, которую необходимо ограничить в соответствии с оператором инверсии:

$$Dom(P) = \{\dot{G}\}: [\mathcal{F}^{-1}\dot{G}] \in \mathfrak{G}_\Psi = \{A_\Psi^{-1}[\dot{u}] \mid \forall \dot{u} \in \dot{\mathcal{U}}\}.$$

Но, благодаря независимости элементов с различными  $v_x, v_y$ , норму можно выразить следующим образом:

$$\|P\| = \max_{v_x, v_y} \frac{\|PQ\delta_{v_x, v_y}\|}{\|Q\delta_{v_x, v_y}\|}.$$

$$\text{Учитывая, что } PQ\dot{U} = \dot{U}, \text{ то } \|P\| = \frac{1}{\min_{v_x, v_y} \|Q\delta_{v_x, v_y}\|}.$$

С точки зрения вычислений, для нахождения числа обусловленности требуется многократное суммирование квадратов соответствующих элементов вектора  $\dot{\Phi}_\Psi$ , сложность  $O(n_x n_y n_z)$ .

Другое условие стабильности вытекает из (2): в теории, единственное ограничение на вектор  $\Psi - \forall v_x, v_y S(\dot{\Psi}\dot{K})[v_x, v_y] \neq 0$ , так как  $S(\dot{\Psi}\dot{K})$  находится в знаменателе. Но в численном решении также важно, чтобы значения  $S(\dot{\Psi}\dot{K})$  не были очень малы. Т.к. дискретный оператор  $S(\dot{\Psi}\dot{K})$  – сумма произведений  $\Psi(v_x, v_y, z)K(v_x, v_y, z)$  по всем  $z$ ,

то абсолютную величину ошибки расчета  $S(\dot{\Psi} \dot{K})$  можно оценить как

$$\xi_{S(\dot{\Psi} \dot{K})}: \xi_{S(\dot{\Psi} \dot{K})}(v_x, v_y) \sim \varepsilon |S(\dot{\Psi} \dot{K})(v_x, v_y)| \left| \frac{\max_z |\dot{\Psi}(v_x, v_y, z) \dot{K}(v_x, v_y, z)|}{S(\dot{\Psi} \dot{K})(v_x, v_y)} \right|,$$

где  $\varepsilon$  – ошибка машинных вычислений. Тогда относительную ошибку вычисления вектора  $\dot{\Phi}_{\dot{\Psi}} = \frac{\dot{G}}{\dot{U}}$  можно оценить следующим образом:

$$e = \left| \frac{\frac{\dot{\Psi}}{S(\dot{\Psi} \dot{K}) + \xi} - \frac{\dot{\Psi}}{S(\dot{\Psi} \dot{K})}}{\frac{\dot{\Psi}}{S(\dot{\Psi} \dot{K})}} \right| = \left| \frac{\xi}{S(\dot{\Psi} \dot{K}) + \xi} \right|.$$

Таким образом,  $e \rightarrow 0$  при  $|S(\dot{\Psi} \dot{K})| \gg \xi_{S(\dot{\Psi} \dot{K})} = \varepsilon S(\dot{\Psi} \dot{K}) \left| \frac{\max_z |\dot{\Psi}_z \dot{K}_z|}{S(\dot{\Psi} \dot{K})} \right|$ , или:

$$\forall v_x, v_y \frac{|S(\dot{\Psi} \dot{K})(v_x, v_y)|}{\max_z |\dot{\Psi}(v_x, v_y, z) \dot{K}(v_x, v_y, z)|} \gg \varepsilon. \quad (4)$$

**Регуляризация**

На основании анализа обусловленности можно предложить метод регуляризации, основанный на грубом ограничении числа обусловленности. Введем коэффициент регуляризации  $\alpha_{reg} \gg 1$  и примем ограничитель  $\lambda = \alpha_{reg} \|P\|$ . Регуляризованное ядро свертки:

$$\dot{\Psi}^{(\lambda)}(v_x, v_y, z) = \begin{cases} \dot{\Psi}(v_x, v_y, z) & | \dot{\Psi}(v_x, v_y, z) | \leq \lambda, \\ \lambda e^{i \arg(\dot{\Psi}(v_x, v_y, z))} & | \dot{\Psi}(v_x, v_y, z) | > \lambda. \end{cases}$$

Пусть  $Q^\lambda(\dot{U}) = \dot{U} \dot{\Phi}_{\dot{\Psi}^{(\lambda)}}$ .

Тогда число обусловленности для пары операторов  $P(Q^\lambda(\dot{U}))$  равно  $\alpha_{reg}$ .

Эта регуляризация основана на грубом отсечении величин, на которые далее масштабируются значения ДПФ поля  $\dot{u}$ . Можно предложить более мягкий вариант, преобразующий с помощью функции  $f(x)$ , имеющей асимптоту  $f(x) = x$  при  $x \rightarrow 0$  и  $f(x) = \lambda$  при  $x \rightarrow +\infty$ , например,  $f(x) = e^{i \arg(x)} \frac{2}{\pi} \lambda \arctg(\frac{\pi}{2\lambda} |x|)$ . При этом при вычислениях необходимо учесть некорректность комплексного вращения при малых  $|x|$ .

**Выбор направляющего вектора**

Из предыдущих пунктов выходит, что делать аналитические рассуждения о виде  $\dot{\Phi}_{\dot{\Psi}}$  очень сложно. Поэтому далее вид  $\dot{\Phi}_{\dot{\Psi}}$  ищется только численно через  $\dot{\Psi}$ .

Условие (4) легко выполнить, если взять такой действительный  $\dot{\Psi}$ , что  $\forall v_x, v_y, z \dot{\Psi}(v_x, v_y, z) \dot{K}(v_x, v_y, z) > 0$ . Т.к.  $\dot{K}(v_x, v_y, z) \approx e^{-z2\pi \sqrt{v_x^2 + v_y^2}} > 0$ , то остается требование  $\dot{\Psi}(v_x, v_y, z) > 0$ . Таким свойством обладает, например,  $\mathcal{F}\psi$ :  $\psi(p, z) = z^{-2}(1 - x^2 - -y^2)e^{-(x^2 + y^2)/z^2}$ . При этом можно брать как  $D\mathcal{F}\psi$ ,

так и  $\mathcal{F}D\psi$ , хотя результат решения обратной задачи в каждом случае будет свой. Также требованию соответствует вариант  $\dot{\Psi} = \dot{K}$ , причем несложными манипуляциями с символами можно показать, что он дает минимум  $L_2$  нормы  $\dot{G}$ . Вариант  $\dot{\Psi}(v_x, v_y, z) = 1$  также подходит. Правда, с практической точки зрения последние два случая могут давать не очень интересную картину.

Конкретные рекомендации по выбору  $\dot{\Psi}$  дать очень трудно. Большее значение имеет вектор  $\dot{\Phi}_{\dot{\Psi}}$ , чья форма и вид имеют решающее значение в локальности и стабильности  $\dot{G} = A_{\dot{\Psi}}^{-1} \dot{U}$ . На практике можно исходить из аналогичного соотношения  $\dot{g} = \langle \dot{u} | \dot{\Phi}_{\dot{\Psi}} \rangle$ : с целью исследования локальности и стабильности решения следует рассмотреть все функции (по  $z$ )  $\dot{\Phi}_{\dot{\Psi}, z}(x, y) = \dot{\Phi}_{\dot{\Psi}}(x, y, z)$ : если все они достаточно плавные, то  $\dot{g}$  также будет плавным; если хотя бы одна функция имеет «волны», разрывы или другие «дефекты», то такие же «дефекты» будут и в  $\dot{g}$ . При этом вид  $\dot{\Phi}_{\dot{\Psi}, z}(x_k, y_j)$  трудно найти просто из аналитического вида  $\dot{\Psi} = D\Psi(v_x, v_y, z)$  или, тем более,  $\dot{\psi} = D\psi(x, y, z)$ , так как выбор параметров сетки  $\dot{\Omega}$  также влияет на вид  $\dot{\Phi}$ .

Если заданные аналитически  $\dot{\Psi}$  (или  $\dot{\psi}$ ) не удовлетворяют исследователя, то можно взять начальное приближение  $\dot{g}' \in \mathfrak{G}$ , построенное на основе априорной информации, и принять  $\dot{\Psi} = \mathcal{F}\dot{g}'$ . В любом случае условие, выраженное в (2), необходимо проверять для каждого начального приближения численно.

**Примеры на синтетических данных**

Попытаемся раскрыть некоторые свойства данного преобразования поля в плотности. Для этого создадим простую плотностную модель  $g_{init}$  – кубическую призму с эффективной плотностью 1 (г/см<sup>3</sup>), окруженную средой с эффективной плотностью 0 (рис. 2). Соответственно, под решением обратной задачи будем понимать обращение поля от этой призмы, полученного в ходе прямого моделирования. Решение обратной задачи в первую очередь зависит от выбранной параметризации  $\dot{\psi}$ , которую мы будем приводить на рис. 3 в левом столбце, а эквивалентную плотностную модель – в правом.

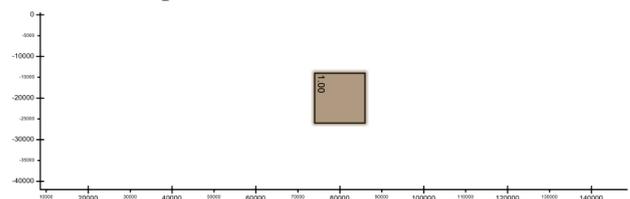


Рис. 2. Исходная плотностная модель  
Fig. 2. Initial density model

Сначала рассмотрим семейство  $\{\psi_{\alpha,\beta}(x,y,z) = |z|^{-\beta}(1-x^2-y^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{(\alpha z)^2}} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha > 0\}$ . Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  имеют смысл перераспределения масс – при увеличении и  $\alpha$ , и  $\beta$  массы перераспределяются ближе к поверхности  $z = 0$  («наверх»), но с несколько различным характером.

Первые три примера параметризации –  $\alpha, \beta = (1,0), (3,0), (1,2)$ . Как видно из рисунков 3а-е, каждая параметризация  $\alpha$  и  $\beta$  соответствует своему эквивалентному распределению плотностей. При этом увеличение параметров перераспределяет плотности к плоскости  $z = 0$ . Для всех трех параметризаций число обусловленности  $k_\psi < 20$ .

Как было замечено ранее,  $\psi \in \mathcal{G}$ , то есть параметр, определяющий оператор обратного преобразования, имеет тот же «тип», то и плотностная модель. Воспользуемся этим и примем  $\psi = g_{init}$ . Соответственно,  $\psi$  и  $A_\psi^{-1}[Ag_{init}]$  представлены на рис. 3ж, 3з. Как видно, результирующая плотностная модель хорошо соответствует изначальной. При этом использовался коэффициент регуляризации  $\alpha_{reg} = 10^7$ .

На рис. 4 представлена исходная модель, состоящая из двух кубических призм, соответствующих по геометрии и глубине залегания  $g_{init}$ , и решение обратной задачи с  $\psi = g_{init}$ . Данный случай иллюстрирует линейность задачи – реконструированная модель состоит из суммы двух реконструированных кубов, которые хорошо отделены друг от друга.

Данные примеры подсказывают нам интересный способ интерпретации метода: метод пытается подобрать модель из предоставленных ей составных частей, в данном случае – кубических призм.

На рис. 3и-м представлены  $\psi$  в виде куба той же геометрии, расположенного выше и ниже исходного, коэффициент регуляризации  $\alpha_{reg} = 10^3$ . Если параметризация  $\psi$  располагается ниже, чем исходная модель, то плотностная модель «распадается» на высокочастотные составляющие (в нашем случае отфильтрованные регуляризацией), а поле аппроксимируется «волнами» из положительных и отрицательных избыточных плотностей с большим значениям избыточной плотности 8 (г/см<sup>3</sup>) (по сравнению с модельной плотностью, равной 1). Если же  $\psi$  располагается выше модели, то кубическая призма «размывается» – решение состоит из множества перекрывающихся кубических призм с малой плотностью, в сумме в наиболее плотных участках достигая значения 0,17 (г/см<sup>3</sup>).

Хотя эти примеры и свойства метода интересны методологически, на практике использовать такую параметризацию  $\psi$  не представляется возможным. Без регуляризации число обусловленности достигает 12-значных значений; регуляризацию со значением  $\alpha = 10^7$  пришлось производить лишь потому, что для представления чисел использовались числа с плавающей точкой одинарной точности, обеспечивающие 7 значимых десятичных разрядов. Так как поле от куба имеет сравнительно малые высокочастотные составляющие, обратный оператор крайне нестабилен. При этом на практике амплитудный уровень шума намного выше –70 дБ.

Рисунки 3ж-з также подсказывают другую интерпретацию метода – где  $\psi$  является начальным приближением плотностной модели. Действительно, когда мы взяли  $\psi = g_{init}$ , решение получилось  $g_{init}$  (правда, без учета ошибок ввиду плохой обусловленности  $A_{\psi=g_{init}}^{-1}$ ).

### Предлагаемый метод инверсии

Общая схема предлагаемого метода инверсии данных гравиметрии представлена на рис. 5.

Предлагаемый метод инверсии можно составить в виде списка изменений рассматриваемого метода инверсии, основанного на фильтрации поля:

1. Использование ядра свертки оператора прямой задачи не в спектральном, а в латеральном аналитическом виде.
2. Исследователь выбирает направляющий вектор, а не ядро свертки оператора инверсии.
3. Ядро свертки оператора инверсии параметризуется не только направляющим вектором, но и параметрами сетки (в первую очередь глубиной).

Интересное свойство такого алгоритма заключается в том, что если вместо ациклического оператора прямой задачи  $A$  (с линейной сверткой) рассматривать его циклический вариант (обозначим его  $\tilde{A}$ ), то выходной набор данных  $\hat{G}_\psi$  точно представляет собой эквивалентное распределение эффективных плотностей для исходных данных  $\dot{u}$ :  $\dot{u} = \tilde{A}\hat{G}_\psi$ , то есть составленный  $A_\psi^{-1}$  – инверсия оператора  $\tilde{A}$ . Если составить в некотором смысле «хорошую» схему экстраполяции данных  $\dot{u}$ , то можно пренебречь свойством цикличности оператора  $\tilde{A}$  и рассматривать плотности, полученные вне точек  $\Omega$ , как в некоторой степени аппроксимацию плотностей, построенную на основе неполной информации. По сути, такая подмена – «грязный трюк», позволяющий получать эквивалентное распределение «без краевых эффектов». С другой стороны, в численной реализации оператор  $A$

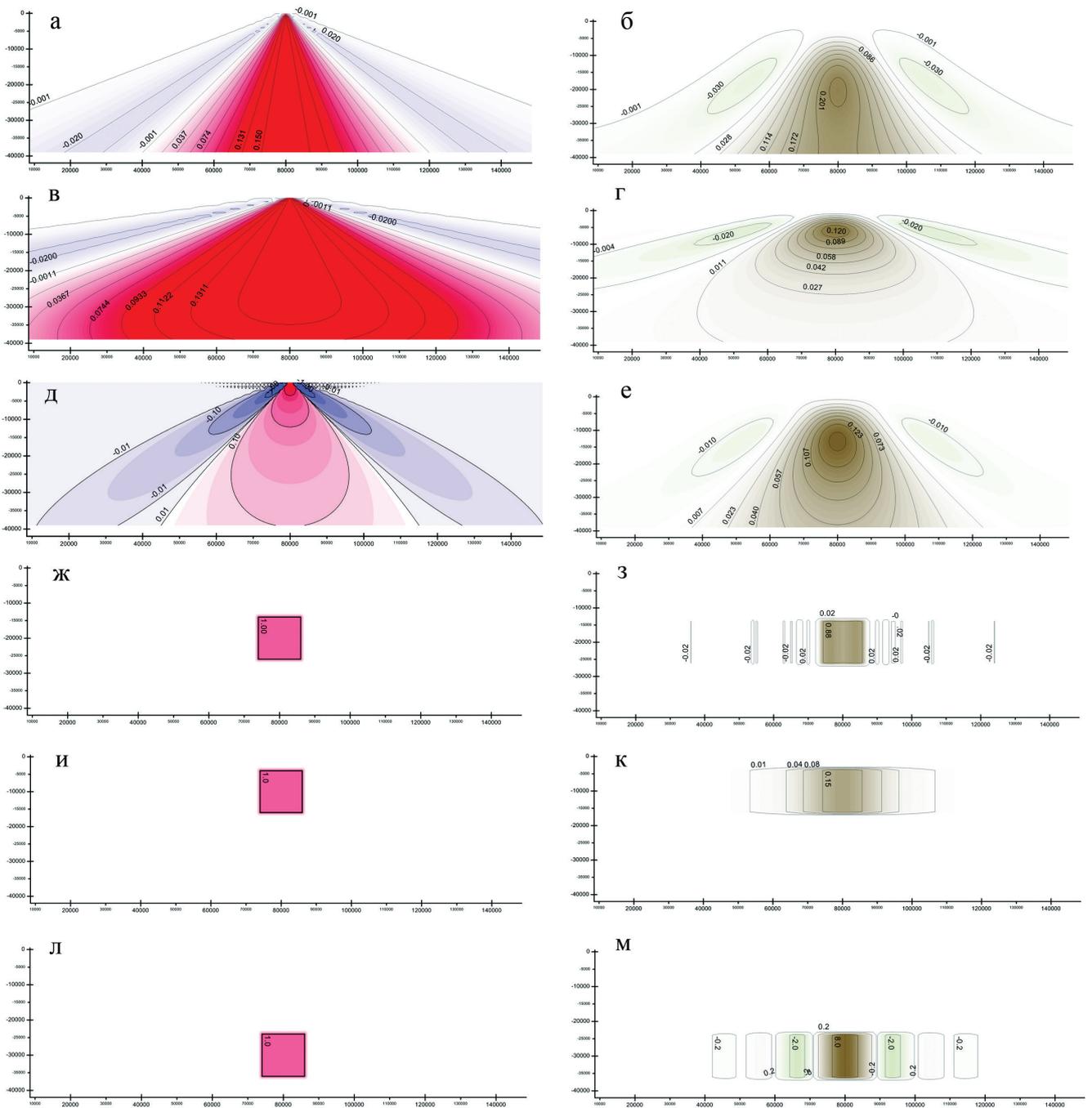


Рис. 3. Различная параметризация  $\psi$  (слева) и соответствующее эквивалентное распределение плотностей (справа): а, б –  $\psi_{1,0}(x, y, z)$ ; в, г –  $\psi_{3,0}(x, y, z)$ ; д, е –  $\psi_{1,3}(x, y, z)$ ; ж, з –  $\psi$  равна исходной модели; и, к –  $\psi$  – призма, взятая выше модели; л, м –  $\psi$  – призма, взятая ниже модели

Fig. 3. Different parameterizations  $\psi$  (to the left) and corresponding equivalent density redistributions (to the right): а, б –  $\psi_{1,0}(x, y, z)$ ; в, г –  $\psi_{3,0}(x, y, z)$ ; д, е –  $\psi_{1,3}(x, y, z)$ ; г, ж:  $\psi$  equals to the initial model; I, j:  $\psi$  is a prism that is above the initial model prism; k, l:  $\psi$  is a prism that is below the initial model prism

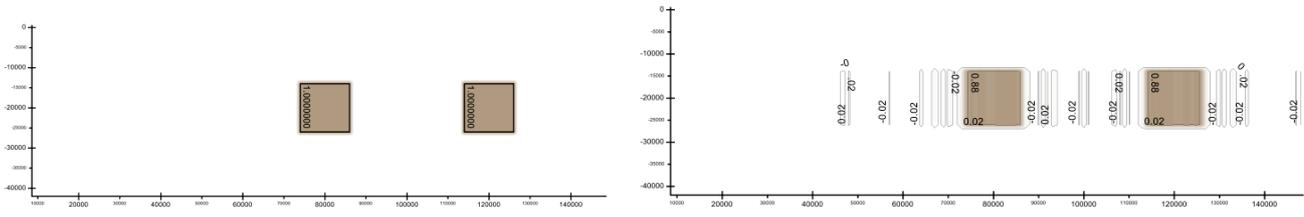


Рис. 4. Две кубические призмы и обращение соответствующего поля

Fig. 4. Two cube prisms and the inversion of the corresponding field



Рис. 5. Общая схема предлагаемого метода инверсии данных гравиметрии

Fig 5. Top-level scheme of proposed method of gravimetric field inversion

обычно подменяется оператором  $\tilde{A}$  ввиду того, что последний можно реализовать через быстрые ДПФ, что уменьшает сложность вычислений с  $O(n^2)$  до  $O(n \log n)$ ,  $n = n_x n_y$ , но неизбежно ведет к циклической свертке и подразумевает использование «хороших» методов экстраполяции. В таком случае численной реализации оператора прямого преобразования соответствует именно оператор  $\tilde{A}$ , а  $A_{\psi}^{-1}$  представляет собой его корректную инверсию.

### Заключение

В ходе работы была рассмотрена численная реализация метода построения эквивалентного распределения эффективных плотностей для поля первой вертикальной производной потенциала, выделены ее недостатки. Для похожих методов, опирающихся на преобразования Фурье, разработана теоретическая основа для создания численных реализаций. На этой основе был построен новый метод инверсии, опирающийся на рассмотренный метод, но лишенный его недостатков. Численная реализация нового метода включена в ГИС Integro.

И все же некоторые вопросы пока остаются без ответа. Во-первых, открытым остается вопрос о «хорошей» экстраполяции данных измерений поля. Как правило, экстраполяция всегда низкосортная, и стоит проблема создания качественных методов экстраполяции. Во-вторых, есть проблема недооценки стабильности оператора инверсии ввиду переоценки величины числа обусловленности. Авторы считают, что введение вероятностной модели помех может существенно улучшить оценку стабильности ввиду особенностей измерений полей: ошибка измерений может иметь разную амплитуду на различных частотах ДПФ. Это вытекает из того, что измерения производятся не на регулярной сетке, и при заполнении укрупненной сетки можно ожидать, что ошибки концентрируются на низких и средних частотах ДПФ. Эти вопросы могут стать направлениями для дальнейших исследований.

**Ключевые слова:** обратная задача гравиразведки, фильтрация, преобразования Фурье.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Блох Ю.И. Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий : учеб. пособие. – М. : РГГРУ, 2009. – 232 с.
2. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам : пер. с англ. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.
3. Кобрунов А.И., Варфоломеев В.А. Об одном методе  $\varepsilon$ -эквивалентных перераспределений и его использовании при интерпретации гравитационных полей // Физика Земли. – 1981. – № 10. – С. 25-44.
4. Кобрунов А.И. Математические основы теории интерпретации геофизических данных: учеб. пособие. – Ухта : УГТУ, 2007. – 286 с. : ил.
5. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов : пер. с англ. : 2-е изд. – М. : Бином-Пресс, 2006. – 656 с. : ил.
6. Мицын С.В., Ососков Г.А. Экстраполяция сеточных моделей геофизических полей методом конечных разностей // Геоинформатика. – 2016. – № 3. – С. 29-34.
7. Приезжев И.И. Построение распределений физических параметров среды по данным гравиразведки, магнитометрии и сейсморазведки // Геофизика. – № 3. – 2005. – С. 46.
8. Priezzhev I., Scollard A., Zhengang L. Regional production prediction technology based on gravity and magnetic data from the Eagle Ford formation // SEG Technical Program Expanded Abstracts. – USA : Texas, 2014. – P. 1354-1358.

### REFERENCES

1. Bloh U.I. Interpretation of gravity and magnetic anomalies. Moscow : RSGPU, 2009. 232 p.
2. Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. PA : Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. – 357 p.
3. Kobrunov A.I., Varfolomeev V.A. On a method of  $\varepsilon$ -equivalent redistributions and its use in gravity field interpretation // Earth Physics. – 1981. No. 10. P. 25-44.
4. Kobrunov A. I. Mathematical basis of theory of gravity data interpretation. Uhta : USTU, 2007. 286 p.
5. Lyons R. Understanding digital signal processing. 2nd edition. – Moscow : Prentice Hall PTR, 2004. – 665 p.
6. Mitsyn S.V., Ososkov G.A. Geophysical grid models extrapolation using finite differences method // Geoinformatics. 2016. No. 3. P. 29-34.
7. Priezzhev I.I. Forming of distributions of medium physical parameters from gravimetric, magnetometric and seismic survey data // Geophysics. 2005. No. 3. P. 46.
8. Priezzhev I., Scollard A., Zhengang L. Regional production prediction technology based on gravity and magnetic data from the Eagle Ford formation // SEG Technical Program Expanded Abstracts. USA : Texas, 2014. P. 1354-1358.