УДК 550.831.015.072

© П.И. Балк

П.И. Балк

В КАКИХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ НУЖДАЕТСЯ ТЕОРИЯ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ГРАВИТАЦИОННЫХ АНОМАЛИЙ?

Введение

Академик В.Н. Страхов неоднократно подчеркивал, что важнейшей задачей математической геофизики в начале текущего столетия является создание теории интерпретации потенциальных полей, полностью адекватной реалиям практики. Рабочим инструментом этой обновленной теории, по-видимому, все также будет математический аппарат решения условно-экстремальных задач. В настоящей статье мы пытаемся разобраться, способны ли известные алгоритмы оптимизации, заимствованные из вычислительной математики, обеспечить решение задач, которые перед ними готова поставить практика интерпретации гравитационных аномалий с учетом последних методологических наработок. По результатам анализа сделан вывод, что хорошо известные геофизикам методы оптимизации не в состоянии удовлетворить потребности современных технологий интерпретации, и у сообщества геофизиков не остается другого, как, опираясь на собственные интеллектуальные ресурсы, разрабатывать проблемно-ориентированные методы оптимизации, использующие специфику обратных задач гравиразведки. Несмотря на более ограниченные познания в общей теории решения экстремальных задач, у геофизиков-теоретиков в этом вопросе имеется неоценимое преимущество перед профессиональными математиками. Что говорить, если сами специалисты по оптимизации солидарны в том, что при решении конкретной задачи минимизации не так важна общность применяемого метода (универсальность, как правило, вступает в противоречие с эффективностью), сколько его тесная связь с особенностями научной области, в которой возникла эта экстремальная задача. Именно геофизикам-теоретикам, которые, в отличие от математиков, не «заточены» на максимальную общность результата, скорее под силу создание необходимых узконаправленных методов оптимизации. Пример тому – монтажный метод В.Н. Страхова [18], удачно зарекомендовавший себя в обратных задачах, где известные методы оптимизации не проявили себя в должной мере.

В статье все рассуждения ведутся в отношении обратных задач гравиразведки. Однако внимательный читатель обнаружит, что затронутые в статье проблемы возникают и при интерпретации данных других геофизических методов.

Различные концепции извлечения информации из гравиметрических данных – различные требования к методам решения экстремальных задач

К очевидным признакам адекватности теории интерпретации гравитационных аномалий, таким, как использование сугубо дискретных моделей измерений поля и неприятие заведомо не реализуемых на практике посылок, следует добавить, по меньшей мере, еще один: наличие математических средств для наиболее полного и надежного извлечения информации об источниках аномалии. Проблема оценки параметров объекта по его косвенным проявлениям является прерогативой теории обратных задач. Что касается непосредственно обратных задач гравиразведки, то рабочим инструментом здесь всегда служили алгоритмы решения экстемальных задач и никакой более эффективной замены им пока не найдено.

Требования к методам минимизации необходимо рассматривать в контексте особенностей того подхода к интерпретации гравиметрических данных, в рамках которого их планируется использовать. Можно выделить два основных подхода, различающихся тем, как в них обыгрывается неоспоримый факт существования множества Q допустимых решений обратной задачи гравиразведки, отвечающих априорным данным G. Все решения $S_\alpha \in Q$ – суть претенденты на роль лучшей аппроксимации истинного решения $\widehat{S}$, которое, кстати, не обязано принадлежать модельному классу M источников аномалии. Мера множества Q – есть мера неопределенности, сопутствующей данной постановке обратной задачи.

Традиционный подход. Еще совсем недавно вопрос о том, как лучше обыграть факт наличия множества Q допустимых решений обратной задачи, не мог даже возникнуть. Господствовала единая и, казалось бы, неоспоримая концепция извлечения информации об источниках аномалии, когда результат интерпретации отождествляется с неким оптимальным решением $S^{opt} \in Q$. Множество Q играет при этом довольно пассивную роль – если на каком-то шаге интерпретационного процесса выясняется, что решение $S_{\alpha} \in Q$ менее предпочтительно, чем $S_{\beta} \in Q$, оно исключается из рассмотрения. Сама оптимальность решения S^{opt} устанавливается по скалярному критерию попарного сравнения конкурирующих вариантов, что согласно теории выбора [1] не является наилучшим способом для рассматриваемого класса геофизических задач. Признак оптимальности решения S^{opt} ассоциируется с глобальным минимумом некоторого функционала $\Phi(S_{\alpha})$ (к примеру, функционала гладкости границы носителя возмущающих масс), так что из двух конкурирующих решений предпочтительней то, которое доставляет меньшее значение функционала Φ.

Если подходить формально, то в контексте вопроса, вынесенного в заголовок статьи, можно сказать, что алгоритмы оптимизации, используемые при решении нелинейных (в том числе рудных) обратных задач гравиразведки, не отвечают их потребностям. Довод простой – проблема абсолютного минимума функций в полной мере пока не решена. Но если по существу, то никто из здравомыслящих геофизиков всерьез не связывает успех интерпретации с абсолютным минимумом критерия оптимальности. Хотя, возможно, не все и отдают себе отчет в том, что поиск глобального минимума функционала не самоцель, а попросту прием, позволяющий выйти на достаточно малое значение функционала, при котором решение уже можно отнести к числу допустимых.

Выполнены многочисленные исследования [6, 13, 5, 14], в которых сделаны выводы о преимуществах и недостатках методов минимизации, наиболее часто используемых при решении обратных задач для потенциальных полей, какие-то из методов существенно доработаны с учетом специфики решаемых задач [16]. По результатам широкого вычислительного эксперимента геофизики худо-бедно подбирают (из числа им известных) наиболее эффективные методы оптимизации для определенных классов обратных задач гравиразведки. Показательно и то, что некоторые геофизики-теоретики, видимо, находясь под влиянием представлений о ценности и важности полученного результата, сложившихся в математике, нет-нет да и ставят в публикациях вопросы, ответы на которые ничего не значат для обратных задач гравиразведки. В самом деле, чем результат интерпретации, отвечающий локальному минимуму невязки (проблема локального экстремума рассматривается как едва ли не главная), лучше решения, отвечающего какому-то «рядовому» допустимому значению невязки, которое может оказаться и ниже локального минимума? И какую роль с точки зрения информативности и достоверности результатов интерпретации имеет факт существования нескольких векторов параметров модели, при которых достигается одно и то же значение локального минимума функционала? Создается впечатление, что эти и подобные вопросы были «подсмотрены» в других математических теориях (где они могли иметь важное значение) и запечатлелись в памяти как факторы, гарантирующие успех в любых прикладных задачах.

В настоящее время специалисты в области оптимизации активно работают над проблемой повышения вероятности отыскания глобального минимума многоэкстремальных функций. Исследования ведутся по многим направлениям. Здесь и построение рандомизированных алгоритмов, основанных на сочетании случайного просмотра области поиска и локальных детерминированных методов поиска минимума [15], и моделирование комбинированных алгоритмов на основе нечетко-нейронных сетей [12] и генетических алгоритмов [10], использующих модели эволюционного развития. Конечно, многие из этих алгоритмов достаточно сложны и предназначены для «штучного» использования. Но ведь в рамках традиционного подхода тоже требуется всего лишь один раз решить условно-экстремальную задачу. Таким образом, если к отсутствию возможности строго найти глобальный минимум относиться как к неизбежному злу, то вроде бы и нет причин отрицать достаточность классических методов оптимизации для обеспечения традиционного подхода к количественной интерпретации аномалий гравитационного поля. Правда, определенная заминка происходит тогда, когда метод оптимизации не вышел на минимально приемлемое значение функционала (например, на допустимую невязку). Остается не ясно, то ли метод просто «не дотянул» до допустимого значения, то ли выбранная модель источников поля и принятые ограничения противоречивы (справедливости ради отметим, что и для другого подхода, о котором речь пойдет ниже, такая неопределенность также прибавляет проблемы). К сожалению, это не все.

Теория оптимизации предъявляет четкие требования к форме записи ограничений на оптимизируемые переменные; это должна быть система равенств и неравенств. Для некоторых модельных классов M, привлекательных по ряду позиций (например, в аналитическом плане), названное требование может оказаться обременительным. Возникает пародоксальная ситуация: методы оптимизации вроде готовы выполнить свою задачу, но дело стоит на месте. Это очень важный момент, ниже мы конкретизируем его.

Теперь главное. Если бы существующий аппарат решения оптимизационных задач и удовлетворял запросам практики решения обратных задач гравиразведки в рамках традиционного подхода, то это не означало бы, что нет претензий к самому подходу. Сторонники традиционного подхода старательно затушевывают очевидное: если вся информация G уже была задействована при формализации множества Q, то «оптимальность» решения S^{opt} по любому признаку, не прописанному в этой информации, носит условный характер. Так, нет повода считать, что решение, минимизирующее невязку, гарантированно превосходит по качеству другие допустимые решения. Чтобы уяснить, каков «информационный вес» отдельного допустимого решения S_α, сопоставим его с некоторым элементом $S \in M$ $(S \notin Q)$, обеспечивающим невязку, слегка превосходящую максимально разрешенную. Иллюзорное преимущество (по линии невязки) допустимого решения S_α над недопустимым S состоит только в одном: если элемент S гарантированно не совпадает с $\widehat{S}$, то в случае $\widehat{S} \in M$ у S_α есть призрачные шансы оказаться истинным решением. При этом не исключено, что элемент S модельного класса окажется ближе к $\widehat{S}$, чем S_α. Такова истинная «цена» отдельно взятого допустимого решения, в том числе «оптимального» решения S^{opt}, таково его информационное наполнение. Здравому смыслу, а заодно и теории принятия решений [19, 20], противоречит подход, при котором выбор лучшего решения слабо зависит от всего контекста выбора, в нашем случае – структуры множества Q. Множество Q можно заметно сузить за счет дополнительных объемов априорной информации, но метод решения обратной задачи будет упрямо указывать все на тот же вариант интерпретации как на лучший.

Читатель может возразить: как бы то ни было, при всех дефектах концепции оптимального решения обратной задачи она успешно применяется в практике интерпретации. Секрет прост: при жестких ограничениях множество Q может оказаться настолько узким, что его достаточно мощное подмножество, в которое вошло и оптимальное решение S^{opt}, состоит из приемлемых по точности вариантов интерпретации. Причем решение S^{opt} может оказаться далеко не самым лучшим среди них. Есть еще скрытый фактор искусственного завышения реальных разрешающих способностей алгоритмов решения обратных задач. В особенности он проявляется при имитационном моделировании. Суть в том, что модельные примеры де-факто работают при более жестких ограничениях, чем те, что заявлены в постановке задачи. Возьмем характерную ситуацию, когда вся априорная информация о свойствах помехи ξ сводится к оценке $\|\xi\| \le \varepsilon_0$. Ясно, что автор алгоритма не станет демонстрировать его возможности на невыгодном модельном примере, в котором, скажем, во всех измерениях помехи одного знака, либо вся допустимая по норме помеха сосредоточена только в одном измерении. Напротив, в иллюстрационных примерах для моделирования помех используются «хорошие» распределения псевдослучайных чисел (нормальный или равномерный закон), на которые часто неявно настроен алгоритм.

Современный подход. Развитию альтернативного подхода к проблеме количественной интерпретации гравитационных аномалий положила работа [2]. Побудительным мотивом к разработке этого подхода стало осознание недопустимости ситуации, когда результат интерпретации доверено целиком представлять одному из множества равноправных допустимых решений обратной задачи. Элемент (у нас S^{opt}) множества (у нас Q), какими бы замечательными свойствами он ни обладал, не дает ясного представления о всем множестве. Есть надежда, что эти и другие соображения, а также опыт решения схожих задач в смежных научных областях [11, 21], которые автор со своими сторонниками пытался донести читателю в публикациях последних лет, позволили пусть и не преодолеть, но хотя бы поколебать стереотипы мышления, укоренившиеся в сознании нескольких поколений геофизиков. В той же работе [2] высказывалась мысль, что оптимальные оценки параметров модели источников поля не являются единственно возможной (и даже наилучшей) математической формой представления результатов интерпретации данных гравиразведки; ни одно из найденных допустимых решений обратной задачи не должно играть роль статиста, а сам результат интерпретации должен быть итогом их неформального согласования.

В тех случаях, когда допустимым решением обратной задачи является вектор параметров модели источников поля, В.Н. Страхов предлагал реализовывать идею согласования допустимых решений обратной задачи путем их усреднения [17]. Некоторые противоречия, которые тянутся за этой идеей, объясняются тем, что результатом усреднения все так же являются единичные оценки параметров модели. В работе [2], опубликованной задолго до [17], за результат согласования предлагаются две области D_1 и D_2, обеспечивающие неулучшаемое включение $D_2 \subset \widehat{S} \subset D_1$ для истинного носителя $\widehat{S}$ источников аномалии, а в работе [8] – функция локализации $\lambda(X)$ для оценивания вероятности обнаружения возмущающих масс в точках X изучаемой части пространства. Технологии интерпретации, в которых ее результат выражен в таких нетрадиционных терминах, предложено называть аддитивными [4]. Даже если технологию удается реализовать в усеченном виде, ограничившись совместным анализом допустимых решений из некоторого подмножества $Q_0 \subset Q$, это можно расценивать как существенное продвижение в вопросе повышения отдачи от гравиразведки.

Таким образом, и в случае аддитивных технологий интерпретации все снова сходится на эффективных методах минимизации. Теперь они должны обеспечить генерирование уже не одного, а достаточно большого числа допустимых решений $S_\alpha \in Q$ обратной задачи, и значит – в отличие от традиционного подхода – речь может идти лишь о полностью формализованных алгоритмах решения обратной задачи. Обеспечить разнообразие допустимых решений, по-видимому, можно было бы за счет выбора различных начальных приближений. Значит пришлось бы предусмотреть формализованный алгоритм продуцирования нужного числа приближений, и не каких попало, а таких, которые – как это требуют известные методы решения обратных задач – обеспечивали бы достаточно малое значение невязки. Кроме того, методы оптимизации должны будут помимо априорной информации G удовлетворять некоторым дополнительным ограничениям G'. Смысл последних – заставить метод искать каждый раз такое решение, которое по определенным признакам отличается от найденных, и этим обеспечивать представительность подмножества Q_0. Такое требование усиливает нагрузку на методы решения экстремальных задач. Однако возникает любопытная ситуация, когда ε-эквивалентность, которая в практике интерпретации является злейшим врагом, здесь становится союзником, обеспечивая широкий выбор допустимых решений $S_\alpha \in Q$ при формировании множества Q_0. Разумеется, такое союзничество лишь способствует построению подмножества Q_0, и в конечном итоге способствует реальному оцениванию уровня неопределенности, но, увы, никак не его снижению.

В аддитивных технологиях под минимизируемый функционал Φ можно отдать одно из априорных ограничений, которое выполняется, как только для заданного Φ_0 окажется справедливым неравенство $\Phi(S_\alpha) \leq \Phi_0$ (к примеру, Φ_0 – согласованное с предполагаемым уровнем помех максимально допустимое значение невязки наблюденного и модельного полей). Нет необходимости, чтобы множество Q_0 содержало решения, доставляющие локальные экстремумы функционалу $\Phi(S_\alpha)$, или значения функционала, «очень» близкие к глобальному, – нас устроят любые допустимые решения, которые обеспечат приемлемые значения функционала. Куда важнее, чтобы подмножество Q_0 было представительным. Есть и общие с традиционным подходом позиции, по которым известные методы минимизации можно признать неудовлетворительными. О неопределенности, которая возникает в ситуации, когда при построении очередного решения не удалось достичь минимально допустимого значения функционала, мы уже говорили. Остается вопрос о формализации некоторых типов ограничений в терминах системы неравенств (что, впрочем, не вина методов минимизации). Отсюда понятно, что требования, предъявляемые к алгоритмам решения задач оптимизации, во многом определяются особенностями модельного класса M. «Неудобные» свойства модельных классов, не проявляющиеся в диалоговых системах интерпретации, сужают возможности применения методов решения экстремальных задач в формализованных алгоритмах решения обратных задач гравиразведки независимо от того, идет ли речь о традиционном или современном подходе.

Требования к методам решения экстремальных задач как функция отдельных элементов структуры интерпретационной модели

Во избежание путаницы напомним, что интерпретационная модель [17] – это не то же самое, что модель источников поля; вторая является одним из структурных элементов первой.

Попробуем более детально разобраться, в какой мере алгоритмы решения оптимизационных (и в первую очередь условно-экстремальных задач), взятые у вычислительной математики, отвечают потребностям аддитивных технологий интерпретации гравитационных аномалий. Теория оптимизации – чрезвычайно разветвленная и бурно развивающаяся наука, и попытка дать сколь-нибудь исчерпывающую справку о ее современном состоянии, не будучи специалистами в этой области знаний, заведомо обречена на неудачу. Нам же важно понять одно, располагает ли аппарат решения экстремальных задач возможностями, в которых нуждаются аддитивные технологии интерпретации гравитационных аномалий, и если нет, задаться вопросом: что здесь могла бы предложить математическая геофизика.

Суть требований аддитивных технологий к методам минимизации проще уяснить, если их раскрыть на конкретной задаче. К примеру, упоминавшейся задаче построения областей D_1 и D_2, обеспечивающих неулучшаемую оценку $D_2 \subset \widehat{S} \subset D_1$ для носителя $\widehat{S}$ возмущающих масс. Область D_1 есть, вообще говоря, объединение всех допустимых носителей из Q, а D_2 – их пересечение. Однако, благодаря ε-эквивалентности, существуют в большом числе узкие подмножества $Q_\gamma \subset Q$, объединение и пересечение элементов каждого из которых совпадает с областями D_1 и D_2. Это обстоятельство можно использовать при конструировании алгоритма построения областей D_1 и D_2 или их приемлемых аппроксимаций.

Возьмем благоприятную ситуацию с классом M, когда всю информацию G можно формализовать в виде, пригодном для использования в некоем методе минимизации A, которому отводится роль рабочего инструмента для построения допустимых модельных носителей $S_\alpha \in Q_0$. Трудно представить более разумную схему, чем итерационный процесс, где за нулевые приближения $D_1^{(0)}$ и $D_2^{(0)}$ берется первый попавшийся носитель $S \in Q$, на который «наткнулся» метод A. Если на шаге $i \geq 1$ методу A удалось найти новый допустимый носитель S_i (за счет выбора нулевого приближения $S_i^{(0)}$ или иным способом), полагаем:

$$D_1^{(i)} = D_1^{(i-1)} \cup S_i\,, \tag{1}$$

$$D_2^{(i)} = D_2^{(i-1)} \cap S_i\,. \tag{2}$$

Если не управлять поиском очередного носителя S_i, можно ожидать следующие неприятности. Во-первых, это череда безрезультативных итераций, когда $D_1^{(i)} = D_1^{(i-1)}$ и $D_2^{(i)} = D_2^{(i-1)}$. Во-вторых, неясно, каким должен быть критерий окончания процесса, то есть когда можно быть уверенным, что он вывел на области D_1 и D_2 или их приемлемые аппроксимации.

Простые размышления подсказывают, что нужно обязать метод A искать на шаге i на роль носителя S_i любой элемент множества $Q_i = Q \setminus \{S, S_1, S_2, S_{i-1}\}$, подчиняющийся условию:

$$\mu(S_i \setminus (S \cup S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{i-1}) > \mu_0\,. \tag{3}$$

Здесь μ_0 – минимальное значение лебеговой меры μ области, на которую мы хотим нарастить область $D_1^{(i)}$. При построении приближения $D_2^{(i)}$ можно избежать безрезультативной итерации, если предложить методу A искать допустимое решение из тех элементов множества Q_i, которые удовлетворяют условию

$$\mu((S \cup S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{i-1}) \setminus S_i) \geq \mu_0\,. \tag{4}$$

Иными словами, без дополнительных ограничений в постановке задачи условной минимизации, о которых говорилось выше, не обойтись.

Мы еще вернемся к вопросу о том, как эти дополнительные ограничения «усложнят жизнь» известным методам решения экстремальных задач. А сейчас вернемся к вопросу о том, какие модельные классы M отвечают требованиям известных методов оптимизации в формализованных технологиях решения обратных задач гравиразведки. Возьмем класс произвольных многогранников, обладающий хорошими аналитикой и аппроксимационными свойствами. Дело здесь даже не доходит до анализа возможности учета ограничений (3) и (4). Этот класс в принципе невозможно задействовать в формализованных алгоритмах решения обратной задачи гравиразведки из-за банальной необходимости контроля за последовательностью обхода вершин многогранника. Не по этой ли причине многие публикации посвящены структурным обратным задачам гравиразведки?

Таким образом, дальнейшее обсуждение любых вопросов, касающихся использования класса многогранников, теряет смысл, и вместе с этим отсекается одна из потенциально возможных конфигураций аддитивных технологий решения обратных задач гравиразведки рудного типа.

Несовместимость классических методов решения экстремальных задач и конечноэлементных модельных описаний носителей источников поля

Отправляясь от проблемы создания адекватной теории интерпретации гравитационных аномалий и продвигаясь к вопросу, поставленному в названии статьи, мы пришли к следующему. Эффективность метода решения условно-экстремальных задач, претендующего на статус рабочего инструмента в аддитивных технологиях интерпретации, следует рассматривать в тесной связи с особенностями модельного класса M источников поля, который должен образовывать с этим методом единое целое. Неутешительный вывод состоит в том, что класс многоугольников и многогранников, аналитические результаты по решению прямых задач для которых являются, образно говоря, одним из «бриллиантов в короне достижений» математической теории интерпретации гравитационных аномалий, а сам класс составляет основу, едва ли, не всех диалоговых систем подбора, не может быть использован в формализованных методах решения обратных задач рудного типа.

С классом многогранников не получилось – «примерим» известные методы минимизации к сеточным классам источников поля, не менее привлекательным в вычислительном плане и обладающим нужными аппроксимативными свойствами. Вспомним, что возможность использования сеточных классов в связке с методами линейного программирования при решении нелинейных обратных задач гравиразведки интенсивно изучалась в 60-х годах прошлого века [22]. Однако надежда на то, что аномальные плотности будут концентрироваться в тех элементах V_j сеточного покрытия изучаемой части пространства D, объединение которых даст приемлемую аппроксимацию истинных возмущающих объектов, не оправдалась. Предпринимались отдельные попытки добиться фокусирования масс с помощью специального слагаемого в минимизируемом функционале. Но обеспечить с помощью всего одного функционала учет сразу всех особенностей распределения масс невозможно. Потому нет смысла обсуждать другие слабые стороны подобных постановок – еще одна задуманная конфигурация аддитивных технологий терпит фиаско.

Безусловно, классический аппарат минимизации не ограничивается методами решения задач линейного программирования с веществеными переменными и, казалось бы, имеет резервы, позволяющие ему побороться за место в связке с сеточными распределениями масс. Имеются в виду методы целочисленного программирования. Во всяком случае, никакого «размазывания» масс по области D теперь не произойдет. Элементам V_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, приписываются переменные x_j, принимающие значение 1, если V_j является фрагментом искомого носителя S^{opt}, и значение 0, если V_j принадлежит его внешности $D\setminus S^{opt}$. Если требуется построить носитель S^{opt}, обеспечивающий совместно с избыточной плотностью $\hat{\delta}$ минимум среднего уклонения наблюдений $\tilde{U}_i$ и поля модельного распределения $<S^{opt}, \hat{\delta}>$, задача целочисленного программирования запишется так: определить вектор x^* параметров $x_1, x_2, \ldots, x_m$, $x_j \in \{0; 1\}$, минимизирующих функционал

$$\Phi(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\tilde{U}_i-\sum_{j=1}^{m}U_{j,i}x_j\right|, \qquad (5)$$

где $U_{j,i}$ – поле масс плотности $\hat{\delta}$, распределенных по элементарной области V_j, в i-й точке. Если окажется, что $\Phi(x^*) \le \varepsilon_0$, где ε_0 – предельно допустимое значение невязки, то объединение всех элементов V_j, для которых переменные x_j приняли значения $x_j^*=1$, и есть оптимальная оценка S^{opt} природного носителя $\hat{S}$.

Получается, что в простейшей постановке рудной обратной задачи методы целочисленного программирования совместимы с сеточным классом M (если не брать во внимание вычислительные аспекты проблемы). Но ситуация изменится, если в постановку внести априорную информацию. Даже для ограничений на максимально возможную мощность возмущающих объектов по латерали и вертикали эффективные способы их учета найти будет трудно. Не менее простой видится и формализация (в терминах неравенств) ограничений на топологию сеточного решения обратной задачи.

Надежда на связку «целочисленное программирование – сеточные классы источников поля» исчезает прежде, чем мы вплотную приблизимся к проблеме ее применения в аддитивных технологиях интерпретации.

Монтажный метод минимизации как рабочий инструмент для реализации аддитивных технологий интерпретации

Проблема универсальной связки конечноэлементного модельного класса M и эффективного метода поиска отдельных допустимых носителей $S_\alpha \in M$ успешно решается в рамках монтажных технологий [18]. Их развитию в последние 20 лет был посвящен не один десяток работ (обзор в [7]). Необходимые сведения о них заключаются в следующем.

В рассмотрение вводится регулярное замощение $T=\{V_j\}$ изучаемого фрагмента пространства D простейшими замкнутыми геометрическими телами V_j, которые конгруэнтны задаваемому интерпретатором телу V. Детальность замощения, характеризуемая лебеговой мерой $\mu(V)$, выбирается интерпретатором так, чтобы любой из двух выводов – $V_j \subset \hat{S}$, $V_j \not\subset \hat{S}$ – можно засчитать как верный, если имело место неравенство $0 < \mu(V_j \cap \hat{S}) < \mu(V_j)$. Допустимым решением S_α обратной задачи считается объединение некоторого числа элементов замощения V_j (назовем его конфигурацией), удовлетворяющего вместе с заданной избыточной плотностью $\hat{\delta}$ априорной информации G. Множество Я(S) всех элементов $V_j \subset S$ назывется ядром конфигурации S. Множество $O(S)$ элементов $V_j \in T$, не принадлежащих ядру Я(S), но граничащих хотя бы с одним из его элементов V_j, называется оболочкой конфигурации. Множество $\Gamma(S)$ элементов $V_j \in$ Я(S), граничащих хотя бы с одним элементом из $O(S)$, назовем границей конфигурации S. Конфигурация S называется связной, если любые два элемента V_j и V_k ее ядра можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в S. Конфигурация S называется односвязной, если любые два элемента V_j и V_k, не принадлежащие ее ядру, можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей вне S. В конструктивном плане свойства связности и односвязности конфигурации проще выразить в терминах неких совокупностей элементов замощения [3].

Простейшая версия монтажного метода (метод регулируемой направленной кристаллизации (РНК)) ориентирована на модель одиночного тела известной плотности $\hat{\delta}$ [18] и представляет итерационный процесс, где в качестве нулевого приближения $S^{(0)}$ к искомому решению обратной задачи – носителю S^* – берется элемент $V_0 \in T$, предположительно принадлежащий истинному носителю. Если по косвенным данным (результатам бурения) можно утвеждать, что некая область заполнена возмущающими массами, то она и берется за начальное приближение $S^{(0)}$. На каждом шаге $t \ge 1$ итерационного процесса осуществляется отбор всех тех элементов $V_j \in O(S^{(t-1)})$, при включении каждого из которых в ядро Я($S^{(t-1)}$) множество Я($S^{(t-1)}) \cup \{V_j\}$ является ядром конфигурации, которая наследует свойства конфигурации $S^{(t-1)}$, продиктованные информацией G. Пусть O'_{t-1} – множество этих элементов. Для каждого элемента $V_j \in O'_{t-1}$ из решения линейной задачи безусловной минимизации определяется плотность $\delta_{t,j}$, минимизирующая невязку наблюденного поля и поля распределения масс $<Я(S^{(t-1)}) \cup \{V_j\}, \delta_{t,j}>$. Если $V_{j(t)} \in O'_{t-1}$ – элемент, при котором достигнуто наименьшее значение ε_t среди вычисленных невязок, то за наилучшее приближение $S^{(t)}$ принимается множество $S^{(t-1)} \cup V_{j(t)}$. Таким образом, результат итерационного процесса суть конечная цепочка строгих включений

$$V_0 = S^{(0)} \subset S^{(1)} \subset S^{(2)} \subset \ldots S^{(t)} \subset \ldots S^{(t(0))} = S^* \qquad (6)$$

и две ассоциированные с ней последовательности:

$$\delta_{1,j(1)}, \delta_{2,j(2)}, \ldots, \delta_{t(0),\, j(t(0))}, \qquad (7)$$

и

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{t(0)}. \qquad (8)$$

Последовательность (8) не обязательно является строго убывающей, что, кстати, иллюстрирует способность метода РНК «проскакивать» некоторые локальные экстремумы. Неожиданным является и критерий останова (номер завершающего шага t_0) итерационного процесса – выход последовательности $\{\delta_{j(t)}\}$, $t = 1, 2, \ldots$, в достаточно малую окрестность истинного значения $\hat{\delta}$. Принципиально ничего не изменится, если $\hat{S}$ – многосвязная область и массы, заполняющие каждый парциальный носитель $\hat{S}_r$, имеют различную избыточную плотность $\hat{\delta}_r$.

Как видим, метод РНК по многим позициям принципиально отличается от классических методов решения экстремальных задач. В нем используется не характерный прием, заключающийся в переводе известного параметра ($\hat{\delta}$) в число свободных. Размерность задачи минимизации изменяется от итерации к итерации и существенно меньше той, что была бы при использовании методов линейного и целочисленного программирования. В методе РНК не так важно, чтобы мера общего фрагмента нулевого приближения и истинного носителя была как можно больше, как то, чтобы мера фрагмента нулевого приближения, не являющаяся и фрагментом реального носителя, была как можно меньше. Разумеется, все это не главное. «Момент истины» для метода РНК состоит в том, что та априорная информация, о которую «споткнулись» известные методы минимизации, вполне доступна ему, поскольку в нем осуществляется *прямая* последовательная проверка каждого из ограничений при формировании на шаге t множества O'_t. Некоторую заминку мог вызвать разве что контроль за ограничениями топологического характера и соблюдением условия гладкости границы носителя, но эти задачи решены в [3].

В плане построения отдельного *результативного* решения обратной задачи остается один вопрос: как быть с условиями типа (3) и (4). Но и здесь все просто. Взять хотя бы задачу построения областей D_1 и D_2 (или их аппроксимаций D_1^* и D_2^*). При построении области D_1 с помощью итерационного процесса (1) шаг i будет результативным, если за начальное приближение $S^{(0)}$ к искомому носителю S^* принять любой элемент замощения $V_j \not\subset D_1^{(i-1)}$. Но если и не удастся выйти на допустимый носитель, последует результативный вывод: $V_j \not\subset D_1$. При построении области D_2 с помощью итерационного процесса (2) шаг i будет результативным, если на каждом шаге поиска очередного допустимого решения наложить запрет на включение в ядро текущего приближения заранее выбранного элемента $V_j \subset D_2^{(i-1)}$. Если выйти на допустимое решение не удастся, будет сделан результативный вывод: $V_j \subset D_2$ и следовательно, $V_j \subset \hat{S}$. Разумеется, мы при этом «закрываем глаза» на проблему глобального экстремума. Оба итерационных процесса – порознь для D_1 и D_2 – завершаются, как только не осталось ни одного элемента V_j, который не был бы задействован прежде в дополнительном ограничении при поиске допустимых носителей.

Нетрудно было заметить, что цепочка наших умозаключений ассоциируется с графом типа дерево, в процессе движения по которому от корня до листьев его отдельные ветви отсекались, если выяснялось, что они соответствуют тупиковому (или менее эффективному, чем другие) варианту развития технологий решения обратных задач гравиразведки рудного типа. Это дерево (назовем его коротко деревом альтернатив) порождено тремя парами конкурирующих альтернатив – <концепция оптимального решения – аддитивные технологии интерпретации>, <класс произвольных многогранников в качестве модели возмущающего объекта – сеточные классы источников поля>, <методы решения экстремальных задач, заимствованные из вычислительной математики – проблемно-ориентированные алгоритмы минимизации типа монтажных>. Мы пришли к выводу, <что связка аддитивные технологии решения обратных задач рудного типа; сеточный модельный класс источников поля; монтажный метод минимизации функционала невязки для поиска допустимых решений обратной задачи> – единственная, кто успешно сдал экзамен на совместимость, в ходе которого на разных этапах и по различным причинам «сошли с дистанции» другие семь комбинаций элементов интерпретационной модели.

Остался последний вопрос: коль скоро монтажные алгоритмы не решают проблему глобального экстремума, то в какой мере можно доверять построенной паре областей $<D_1^*, D_2^*>$. Теоретически не исключено, что некоторые элементы V_j, в действительности принадлежащие хотя бы одному из допустимых носителей, могли быть исключены из числа фрагментов области D_1^* по той причине, что при поиске соответствующего допустимого носителя монтажному методу не удалось «дотянуть» до приемлемого значения невязки. По той же причине монтажный метод мог не выйти и на допустимый носитель, ядро которого не содержит некий элемент V_j, при том что ядрам всех носителей, которые удалось построить, он принадлежит. Но все не так драматично.

На практике не столь важно, имеет ли место совпадение D_1^* с D_1 и D_2^* с D_2; главное, чтобы с достаточной степенью надежности выполнялось включение $D_2^* \subset \widehat{S} \subset D_1^*$. Тем не менее по результатам интерпретации в терминах пары $<D_1^*, D_2^*>$ (независимо от того, насколько представительно подмножество Q_0) можно сделать следующий строгий вывод: при адекватности всех априорных посылок фрагмент D_1 пространства, в точках которого в принципе можно обнаружить возмущающие массы, содержит область D_1^*, а фрагмент пространства D_2, наверняка целиком заполненный источниками аномалии, содержится в области D_2^* и в неблагоприятном случае может быть пустым множеством. Или короче: область неопределенности, точки которой невозможно идентифицировать на предмет (не) принадлежности носителю $\widehat{S}$, содержит как свое подмножество область $D_1^*\backslash D_2^*$. Если за меру ε-эквивалентности принять величину $\mu(D_1\backslash D_2)$, то $\mu(D_1^*\backslash D_2^*)$ – оценка снизу для этой меры.

Однако, как это часто бывает, объем и качество информации об изучаемом объекте, которую фактически удалось извлечь из экспериментальных данных, оказывается больше и выше, чем то, что обещает теория, которой приходится принимать во внимание всякие патологические исходы. Численные расчеты демонстрируют более высокую информативность пары $<D_1^*, D_2^*>$ – во всех модельных примерах выполнялось включение $D_2^* \subset \widehat{S} \subset D_1^*$. И этому есть простое объяснение: найденные допустимые модельные носители подстраховывают носители, которые оказались недопустимыми по невязке и фактически повлекли к ошибочным утверждениям. Если попытка построения очередного допустимого носителя оказалась безуспешной, и на этом основании был сделан ложный вывод: $V_j \not\subset D_1$, то достаточно, чтобы при поиске следующих допустимых носителей, ориентированных на идентификацию других элементов замощения, был построен хотя бы один, чье ядро «попутно» захватило элемент V_j. Если это случится, прежний вывод пересматривается и принимается, что $V_j \subset D_1$. Аналогично и в случае D_2.

Эффективность любого метода решения экстремальных задач применительно к геофизической проблематике носит относительный характер и обусловлена тем, в какой мере он согласован с целым рядом структурных элементов модели интерпретации. Это обстоятельство ведет к скачкообразному ужесточению требований к методам минимизации и отсекает многие, на первый взгляд вполне оправданные конфигурации аддитивных технологий интерпретации аномалий гравитационного поля.

Перспективы дальнейшего развития монтажных технологий

Опыт решения практических задач свидетельствует, что даже простейшая версия монтажных методов – метод регулируемой направленной кристаллизации – доставляет приемлемое значение функционала невязки, отвечающей за одно из важнейших ограничений на допустимые решения обратной задачи. Но если согласиться с приведенными доводами и принять, что монтажные методы есть единственный конструктивный рабочий инструмент для реализации аддитивных технологий интерпретации гравитационных аномалий в случае рудной обратной задачи, то их желательно совершенствовать. прогнозируя ситуацию, когда возможностей метода РНК окажется недостаточно. Если для монтажных алгоритмов вопрос учета априорных ограничений на источники аномалии не возникают, а проблемы могут появиться лишь в связи с достигнутой величиной невязки, то спрашивается: каковы перспективы ощутимого понижения невязки за счет усложнения структуры итерационного шага метода РНК. Можно с ходу назвать несколько потенциально возможных подходов к структурированию итерационного процесса, за которыми будут стоять достаточно разумные эвристики. Не станем их все рассматривать, но отметим, что дерево альтернатив, построение которого мы начали выше, еще более разрастается.

Легко видеть, что метод РНК имеет один «эстетический» дефект: элемент замощения V_k, включенный в ядро текущего приближения $S^{(t)}$, автоматически попадает и в ядро итоговой конфигурации S^*. Но оптимальность включения $V_k \in Я(S^{(t)})$ носит локальный характер, тогда как с точки зрения проблемы в целом такое включение может оказаться неудачным. Если удается достичь нужного значения невязки, то этот дефект, конечно же, не играет никакой роли, но, вообще говоря, он устраним, хотя бы с помощью алгоритма регулируемой направленной перекристаллизации (РНП). На каждом шаге алгоритма осуществляется обмен элементами между оболочкой и границей предшествующего приближения – по одному элементу с каждой стороны.

Так что

$$Я(S^{(t)}) = Я(S^{(t-1)}) \cup \{V_k\} \setminus \{V_l\}, \qquad (9)$$

где $V_k \in O(S^{(t-1)})$ и $V_1 \in \Gamma(S^{(t-1)})$ – локально-оптимальная (по минимуму невязки) пара элементов среди всех пар, допустимых априорными ограничениями. В качестве нулевого приближения в методе РНП есть смысл брать решение, построенное по методу РНК. Тогда на протяжении почти всего итерационного процесса можно работать с истинной плотностью $\hat{\delta}$.

Другой тип структурирования итерационного шага позволяет – как и метод РНК – работать с возрастающей (по операции включения) последовательностью ядер текущих приближений $S^{(t)}$. На каждом шаге в ядро $Я(S^{(t-1)})$ переводится уже не один, а $m = 2, 3, \ldots$ элементов замощения V_k из $O(S^{(t-1)})$. Читатель, безусловно, и сам пришел к тому, что достаточно красиво смотрелся бы шаг, на котором ядро $Я(S^{(t-1)})$ предшествующего приближения $S^{(t-1)}$ наращивалось сразу на некоторое оптимальное число m элементов оболочки. Но даже при малом m рассчитывать на полный перебор всевозможных вариантов не приходится. В этой связи заманчиво выглядит идея привлечения на каждом шаге методов целочисленной оптимизации.

Суть идеи раскроем на обратной задаче гравиразведки для связного носителя $\hat{S}$, заполненного массами известной избыточной плотности $\hat{\delta}$. Пусть $Я(S^{(t-1)})$ и $O(S^{(t-1)})$ – ядро и оболочка текущего приближения $S^{(t-1)}$ к искомому носителю S^*, допустимому по невязке. За ядро приближения $S^{(t)}$ возьмем множество

$$Я(S^{(t)}) = Я(S^{(t-1)}) \cup O'(S^{(t-1)}), \qquad (10)$$

где $O'(S^{(t-1)})$ – подмножество элементов замощения $V_j \in O(S^{(t-1)})$, обладающее следующим свойством: существует такое δ_t, что в точках измерения x_i невязка наблюденного поля $\Delta\tilde{g}(x)$ и поля масс, размещенных с плотностью δ_t по конфигурационному носителю с ядром (10), не превышает невязку распределения масс любой постоянной плотности δ по любой конфигурационной области с ядром $Я(S^{(t-1)}) \cup O''(S^{(t-1)})$, $O''(S^{(t-1)}) \subseteq O(S^{(t-1)})$. Иначе говоря, предлагается укрупнить структуру итерационного шага, когда ядро предшествующего приближения $S^{(t-1)}$ наращивается на оптимизируемое число $\left|O'(S^{(t-1)})\right| \le \left|O(S^{(t-1)})\right|$ элементов оболочки $O(S^{(t-1)})$. Чему оно будет равно и какие именно элементы будут взяты из оболочки $O(S^{(t-1)})$ как раз должны решить методы целочисленного программирования.

Если $m(t)$ – число элементов замощения в оболочке $O(S^{(t-1)})$, то минимизируемый функционал в случае квадратичной метрики приобретет следующий вид:

$$\Phi(\omega;\delta) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\Delta\tilde{g}(x_i) - \delta \sum_{k=1}^{m(t-1)} \Delta g(V_k; x_i)\omega_k \right)^2 \right)^{1/2}, \qquad (11)$$

где δ – вещественная переменная, ω – вектор бинарных целочисленных переменных $\omega_k \in \{0; 1\}$, ассоциированных с элементами замощения $V_k \in O(S^{(t-1)})$ (на каждом шаге t для удобства используется сквозная нумерация этих элементов), а $\Delta g(V_k; x_i)$ – значение в точке x_i поля масс единичной плотности, распределенных по области V_k. Пусть ω^* – вектор, минимизирующий функционал (11). На шаге t в ядро очередного приближения $S^{(t)}$ войдут те элементы $V_k \in O(S^{(t-1)})$, для которых ассоциированные бинарные переменные ω_k примут значение $\omega_k^* = 1$.

А как быть с априорной информацией? Скажем, ограничения на границы простирания возмущающего объекта мы еще сможем предусмотреть, изымая отдельные элементы $V_k \in O(S^{(t-1)})$ из числа претендентов на включение в ядро $Я(S^{(t)})$. В случае регулярного замощения T нетрудно записать в виде системы неравенств и ограничения на предельно допустимую мощность возмущающего объекта по разным направлениям (вертикали, латерали), равно как и приемлемую форму контактирования парциальных носителей, если речь идет о многосвязном распределении масс. По большому счету остаются ограничения топологического характера.

Итерационный шаг обобщенного метода РНК, как и «простого» метода РНК, обеспечивает связность итогового носителя S^* по построению. Но потерять односвязность у носителя S^* при более сложной структуре шага значительно больше шансов. Если в методе РНК еще можно было контролировать условие сохранения односвязности при переходе к очередному приближению $S^{(t)}$ без чрезмерных вычислительных затрат, то сейчас это уже не реально. Есть несколько путей решения этой проблемы, и это делает еще более «ветвистым» дерево альтернатив. Эффективность каждого из них может подтвердить (или опровергнуть) лишь численный эксперимент. Первый путь – корректировать каждое приближение $S^{(t)}$, второй – сразу итоговое решение S^*. Если построенный без оглядки на требование односвязности носитель S^* не даст меньшее значение невязки, чем простой метод РНК, то сразу сделаем вывод, что усложнение структуры итерационного шага было напрасной затеей. Впрочем, и это будет позитивный результат – отсекается одна из спорных ветвей дерева альтернатив. Если исход оказался успешным, то с помощью малозатратной процедуры [3] проверим построенный носитель S^* на предмет односвязности и определим номера k элементов V_k, составляющих ее «дыры», если таковые есть. Дополним S^* до минимальной односвязной конфигурации S^{**} (элементы V_k, образующие «дыры» в S^{**}, переведем в ее ядро). Область S^{**} стала односвязной, но ее ядро приобрело какое-то число избыточных элементов V_k, из-за чего невязка рапределения $<S^{**}, \hat{\delta}>$ может стать выше положенной. Построение допустимого решения завершит метод регулируемой направленной раскристаллизации (РНР), примененный в отношении распределения масс по носителю S^{**}. Метод РНР в определенном смысле является обратным к методу РНК. Конфигурация S^{**} принимается за нулевое приближение, и на каждой итерации осуществляется изъятие одного из элементов границы $\Gamma(S^{(t-1)})$ предшествующего приближения. Все остальное – как в методе РНК.

Еще одно важное ограничение топологического характера – условие гладкости носителя. И здесь есть по меньшей мере два пути формализации этого условия. Первый – ограничение сверху на отношение мощности ядра построенной конфигурации к мощности ее ядра. Второй путь – выразить условие гладкости в терминах мощности ядер бессодержательных связных фрагментов его границы, представляющих собой «ветвящиеся цепочки» элементов замощения, изъятие любого одного из которых разрушает связность этого фрагмента. В работе [3] предложены эффективные способы идентификации таких фрагментов (названных отростками) и разрушения их за счет наращивания ядра негладкой конфигурации на минимальное число элементов замощения. Все это также можно применить на завершающем этапе, когда требуется «подправить» конфигурацию S^{**}.

Таким образом, мы имеем по сути два «склеенных» дерева альтернатив. Корнем второго дерева, контуры которого мы схематично наметили в этом разделе статьи, является тот самый лист первого дерева, который отвечает за перспективный путь развития аддитивных технологий интерпретации для рудных обратных задач гравиразведки. Монтажные алгоритмы не относятся к классу так называемых жадных итерационных алгоритмов [9], когда оптимальность на каждом шаге обеспечивает алгоритму оптимальность в целом; нельзя заранее предсказать, окажется ли удачным комбинирование монтажного метода с методами целочисленного программирования. Читателю, который будет готов взяться за продолжение работы по созданию соответствующего программного обеспечения, можно порекомендовать не сразу браться за столь довольно сложное программное обеспечение. Есть смысл испробовать вначале частную версию итерационного монтажного метода, где на каждом его шаге с помощью прямого перебора оптимизируется одновременный выбор из $O(S^{(t-1)})$ двух и трех элементов замощения, и потом уже сделать выводы о разумности дальнейших исследований в начатом направлении.

Заключение

Методы решения экстремальных задач составляют основу любых технологий количественной интерпретации гравитационных аномалий. Методологическому аспекту проблемы достаточности существующих методов минимизации для нужд геофизики в специальной литературе уделяется незаслуженно мало места. Исследования в этом направлении носят точечный характер и ограничиваются, как правило, вопросами скорости сходимости к локальному минимуму. Не всегда ясно, обусловлено применение того или иного алгоритма минимизации личными пристрастиями автора, недоступностью более подходящего программного обеспечения, или все же это связано с отсутствием разумных альтернатив. Вместе с тем, эффективность, да и сама возможность применения того или иного алгоритма решения условно-экстремальной задачи самым тесным образом связана с другими структурными элементами интерпретационной модели. В статье предпринята попытка дать развернутый анализ возможностей классических методов оптимизации применительно к рудной обратной задаче гравиразведки. Выяснилось, что предложенный В.Н. Страховым проблемно-ориентированный метод минимизации невязки подбора наблюденного поля и его различные модификации фактически являются едва ли не единственным инструментом для реализации аддитивных технологий интерпретации данных гравиразведки в рудной постановке обратной задачи.

Ключевые слова: экстремальные задачи, гравиразведка, обратная задача, неопределенность выбора, информация, допустимые решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М.А., Малишевский А.В. Некоторые аспекты общей теории выбора лучших вариантов // Автоматика и телемеханика. – 1981. – № 2. – С. 65-83.
2. Балк П.И. О надежности результатов количественной интерпретации гравитационных аномалий // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1980. – № 6. – С. 65-83.
3. Балк П.И. Использование априорной информации о топологических особенностях источников поля при решении обратной задачи гравиметрии // Докл. АН СССР. – 1989. – Т. 309. – № 5. – С. 1082-1084.
4. Балк П.И., Долгаль А.С. Аддитивные технологии количественной интерпретации гравитационных аномалий // Геофизика. – 2016. – № 1. – С. 43-47.
5. Булах Е.Г. Обзор работ по методам минимизации в обратных задачах гравиметрии и магнитометрии // Геофизический журнал. – 1999. – Т. 21. – № 4. – С. 5-19.

6. Гольдшмидт В.И. Методы нелокального поиска в обратной задаче гравиметрии // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1979. – № 5. – С. 79-86.
7. Долгаль А.С., Балк П.И., Деменев А.Г., Мичурин А.В., Новикова П.Н., Рашидов В.А., Христенко Л.А., Шархимуллин А.Ф. Использование метода конечных элементов при интерпретации данных гравиразведки и магниторазведки // Вестник КРАУНЦ. – 2012. – Т. 1. – № 19. – С. 108-127.
8. Долгаль А.С., Шархимуллин А.Ф. Повышение точности интерпретации моногеничных гравитационных аномалий // Геоинформатика. – 2011. – № 4. – С. 49-56.
9. Кармен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. – М. : Изд-во «Вильямс», 2005. – 1296 с.
10. Кныш Д.С., Курейчик В.М. Параллельные генетические алгоритмы // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2010. – № 4. – С. 72-82.
11. Костомаров Д.П., Зайцев Ф.С., Сучков Е.П. Построение сильно различающихся решений некоторого класса некорректных задач с неточно заданными входными данными // Докл. РАН. – 2011. – Т. 437. – № 3. – С. 316-320.
12. Кошур В.Д. Адаптивный алгоритм глобальной оптимизации на основе взвешенного усреднения координат и нечетко-нейронных сетей // Нейроинформатика. – 2006. – Т. 1. – № 2. – С. 106-123.
13. Майер В.И., Никонова Ф.И., Федорова Н.В. Численная оптимизация при интерпретации гравитационных аномалий // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1985. – № 5. – С. 46-57.
14. Мартышко П.С., Акимова Е.Н., Мисилов В.Е. О решении структурной обратной задачи гравиметрии модифицированными методами градиентного типа // Физика Земли. – 2016. – № 5. – С. 82-86.
15. Рубан А.И. Метод глобальной оптимизации, основанный на селективном усреднении координат, при наличии ограничений // Вестник Томского гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – № 1(22). – С. 114-123.
16. Старостенко В.И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. – К. : Наукова думка, 1978. – 228 с.
17. Страхов В.Н. Геофизика и математика // Физика Земли. – 1995. – № 12. – С. 4-23.
18. Страхов В.Н., Лапина М.И. Монтажный метод решения обратной задачи гравиметрии // Доклады АН СССР. – 1976. – Т. 227. – № 2. – С. 344-347.
19. Черемисина Е.Н., Никитин А.А. Системный анализ в природопользовании. – М. : Изд-во «ВНИИГеосистем», 2014. – 117 с.
20. Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений. – СПб. : Изд-во «БХВ-Петербург», 2005. – 416 с.
21. Черноусько Ф.Л. Оптимальные гарантированные оценки неопределенностей с помощью эллипсоидов // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1980. – № 3. – С. 3-11.
22. Шалаев С.В. Геологическое истолкование геофизических аномалий с помощью линейного программирования. – Л. : Недра, 1972. – 142 с.