

УДК 519.6:550.83.017

© Д.Н. Раевский, И.Э. Степанова

Д.Н. Раевский, И.Э. Степанова

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬШИХ РАЗМЕРНОСТЕЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГЕОФИЗИКИ

1. Введение

В настоящее время при решении многих прикладных обратных задач геофизики все чаще прибегают к использованию многопроцессорных вычислительных систем (МВС) (см., например, [1-5]), что в первую очередь обусловлено постоянным ростом объема данных, подлежащих интерпретации. После редуцирования задачи к конечномерной возникают системы уравнений с большим числом ненулевых матричных элементов (более 10^8), которые необходимо решать с заданной точностью с учетом некоторой исходной априорной информации, зависящей от типа и методики решаемой задачи [1-3]. Раньше из-за ограниченности вычислительных возможностей при решении обратных задач геофизики чаще всего рассматривался двумерный случай, что ограничивало интерпретационные возможности. Алгоритм решения трехмерных обратных задач значительно сложнее алгоритма для двумерного случая, что приводит к худшей обусловленности получаемой системы. Методы решения плохо обусловленных систем больших размерностей требуют значительных вычислительных ресурсов, что стимулирует применение МВС. Использование параллельных вычислений позволяет конструировать алгоритмы решения обратных задач, сокращающие общее вычислительное время за счет увеличения вычислительных узлов и размещения в оперативной памяти всей матрицы, что сможет обеспечить нахождение устойчивого приближенного решения с требуемой точностью даже при интерпретации больших массивов данных.

Разработка параллельных алгоритмов решения обратных задач особенно важна и актуальна при интерпретации данных аномальных геофизических полей. Аномальные геофизические поля несут в себе большую полезную информацию о неоднородностях в недрах нашей планеты. Качественная и количественная интерпретации данных гравиметрии,

магнитометрии, электроразведки и других геофизических методов позволяют решать широкий спектр задач: от поиска и разведки полезных ископаемых до выявления крупных региональных структур. Однако извлечение полезной информации по данным аномальных геофизических полей требует вычисления линейных трансформант поля (приведение к регулярной сети точек, пересчет поля в нижнее и верхнее полупространства, вычисление высших производных и т.д.), что возможно только при качественном устойчивом решении трехмерной обратной задачи. К тому же увеличение разрешающей способности геологических исследований приводит к еще более неоднозначным результатам, что является дополнительным стимулом к разработке новых эффективных методов решения обратных задач геофизики, поддерживающих вычисления на МВС.

В настоящей работе рассматривается обратная задача гравиметрии в трехмерном варианте. Задача решается модифицированным методом S-аппроксимаций [6, 7], в котором исходный элемент аппроксимируется суммой простого и двойного слоев, распределенных на некоторой совокупности носителей, залегающих ниже заданного рельефа. После редуцирования задачи к конечномерной, основной вычислительной проблемой является нахождение устойчивого приближенного решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{f}_\delta, \quad (1)$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T > 0$ – исходная $N \times N$ -матрица (N – общее количество измерений), \mathbf{f}_δ – вектор, компоненты которого представляют собой значения некоторого измеренного на поверхности Земли элемента (аномальное гравитационное поле, аномальное магнитное поле, рельеф и т.п.), \mathbf{x} – вектор решения, который необходимо найти.

Свойства матрицы \mathbf{A} системы (1) зависят как от типа решаемой задачи, так и от конкретной методики, применяемой при ее решении. Например,

по интерпретационному характеру обратные задачи гравиметрии подразделяются на множество типов: задача рудного типа по восстановлению форм или плотностей геологических тел [4, 6, 8, 9], построение глобальных моделей гравитационного поля [3, 7], задача нахождения поверхностей раздела нескольких сред [1] и многие другие. Методики решения перечисленных обратных задач также разнообразны. Особенно часто используется сферический гармонический анализ (СГА), в рамках которого потенциальное поле раскладывается по сферическим функциям [3]. Достаточно полно методы решения обратных задач гравиметрии отображены в монографии [10].

При решении обратных задач геофизики тем или иным методом матрица A системы (1) является плохо обусловленной, поэтому изначально применяются стандартные методы регуляризации [11]. Для нахождения устойчивого приближенного решения используются методы градиентного и ньютоновского типов [1, 5], прямые методы [3, 12] и другие итерационные методы [2, 4]. Прямые методы для решения систем больших размерностей (например, метод квадратного корня [3, 12]) целесообразно использовать только в том случае, если матрица имеет специфический вид (например, является сильно разреженной) и хорошо обусловлена. В противном случае полученное решение будет неустойчивым и дальнейшее извлечение полезной информации будет затруднительным. Использование градиентных методов в региональном варианте при интерпретации больших объемов данных не всегда приводит к желательным результатам, что связано с большим количеством ярко выраженных локальных экстремумов целевого функционала. Поэтому актуальным в настоящее время является сейчас направление, связанное с разработкой специфических итерационных методов решения плохо обусловленных СЛАУ, возникающих в рамках обратных геофизических задач.

2. Постановка задачи

Задачи интерпретации аномальных геофизических полей в трехмерном случае условно можно разделить на два типа: *локальный* и *региональный*. Такое разграничение имеет существенное значение при решении обратных задач геофизики.

В *локальном варианте* горизонтальные размеры исследуемой территории не превышают одного градуса по долготе (так как в различных областях планет длины дуг параллелей различаются). Тогда сферичностью Земли можно пренебречь. В этом случае можно выбрать декартову систему координат с вертикальной осью OZ , направленной вверх.

В противном случае задача должна решаться в *региональном варианте*, если, например, необходимо

построить аппроксимацию области, соответствующей конкретному кристаллическому массиву, континенту или даже целой планете. Тогда сферичность учитывается и идеализированную Землю можно рассматривать как сферу определенного радиуса, а систему координат выбрать сферическую.

Предположим, что нам заданы некоторые значения f_δ^i , измеренные в некоторой совокупности точек рельефа (x_1^i, x_2^i, x_3^i) , $1 \leq i \leq N$. В рамках метода линейных интегральных представлений, разработанного академиком В.Н. Страховым (см., например, [12]), представим измеренные величины f_δ^i в виде суммы полезного сигнала f^i и помехи случайного характера δf^i :

$$f_\delta^i = f^i + \delta f^i, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (2)$$

и пусть для всех f^i справедливы следующие интегральные представления:

$$f^i = u(x^i) = \sum_{r=1}^R \int_{M_r} \rho_r(\xi) Q_r^{(i)}(\xi) d\mu_r(\xi), \quad 1 \leq i \leq N, \quad (3)$$

где R – общее количество носителей, аппроксимирующих исходное потенциальное поле, M_r – заданные связные множества, $Q_r^{(i)}(\xi) \in L_2(M_r)$ – заданные функции, $\mu_r(\xi)$ – заданные меры на M_r , а $\rho_r(\xi) \in L_2(M_r)$ – функции, подлежащие определению. Далее ставится условная вариационная задача, из решения которой можно определить аппроксимации неизвестных функций $\rho_r(\xi)$:

$$F(\rho) = \sum_{r=1}^R \int_{M_r} \rho_r^2 d\mu_r(\xi) = \min_{(\rho, \xi)} \rho(\xi) = (\rho_1(\xi), \rho_2(\xi), \dots, \rho_R(\xi)), \quad (4)$$

$$f_{i,\delta} - \sum_{r=1}^R \int_{M_r} \rho_r(\xi) Q_r^{(i)}(\xi) d\mu_r(\xi) = 0.$$

Решая задачу (4) методом множителей Лагранжа [13], получаем, что аппроксимации искомых функций имеют следующий вид:

$$\rho_r(\xi) \approx \tilde{\rho}_r^{(a)}(\xi) = \sum_{i=1}^N \lambda_i Q_r^{(i)}(\xi), \quad 1 \leq r \leq R, \quad (5)$$

где неизвестный вектор множителей Лагранжа $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ находится из решения следующей СЛАУ:

$$A\lambda = f_\delta,$$

$$a_{ij} = \sum_{r=1}^R \int_{M_r} Q_r^{(i)}(\xi) Q_r^{(j)}(\xi) d\mu_r(\xi), \quad (6)$$

$$1 \leq i \leq N; \quad 1 \leq j \leq N.$$

Поэтому основной вычислительной проблемой метода линейных интегральных представлений является решение СЛАУ (6). При решении предполагается, что нам известны постоянные δ_{min}^2 и δ_{max}^2 , которые являются оценками квадрата нормы невязки снизу и сверху:

$$\delta_{min}^2 \leq \|Ax - f_\delta\|_E^2 \leq \delta_{max}^2. \quad (7)$$

Знание этих постоянных позволяет найти множество *допустимых решений* R_x , которое определяет все устойчивые приближенные решения, удовлетворяющие неравенству (7).

В рамках метода линейных интегральных представлений В.Н. Страховым и И.Э. Степановой был разработан метод S-аппроксимаций [14, 15], который заключается в аппроксимации исходного поля суммой простого и двойного слоев, распределенных на некоторой совокупности носителей, залегающих ниже заданного рельефа. Описание алгоритма можно найти в вышеупомянутых работах [14, 15]. В рамках этого метода как для элементов матрицы A системы (6), так и для соответствующих линейных трансформант поля получаются простые аналитические формулы, поэтому алгоритм метода S-аппроксимаций весьма прост и эффективен при интерпретации данных аномальных потенциальных полей. Однако этому методу присущ один серьезный недостаток: невязка между исходным и аппроксимированным полями минимизируется в пространстве функций, интегрируемых на носителе эквивалентных масс. Подобная постановка задачи приводит к простым аналитическим формулам, однако при этом теряется существенная информация о геометрических параметрах аномалиеобразующих тел, представляющих первостепенный интерес. Постановка же задачи в других классах (например, в пространстве равномерно непрерывных или равномерно дифференцируемых функций) значительно усложнит алгоритм, что приведет к значительному понижению точности при вычислении линейных трансформант, что повлечет за собой некачественную интерпретацию данных.

Одним из способов устранения указанных проблем является введение особого функционала, позволяющего уточнять некоторые допустимые решения СЛАУ (6). Основная конструкция S-аппроксимации сохраняется, поэтому такой метод был назван *модифицированным методом S-аппроксимаций* [6, 7].

В модифицированном методе S-аппроксимаций решения находятся по формулам (5)-(6). Рассмотрим дополнительный функционал качества решения $\Omega(\rho)$, который будет «отбирать» наилучшие решения среди множества допустимых решений R_x СЛАУ (6). Заметим, что в этом случае решение модифицированной вариационной задачи вида
$$\left[\Omega(\rho) + F(\rho) = \min_{\rho(\xi)} \right]$$

неэффективно по двум причинам:

1) функционал качества решения $\Omega(\rho)$ может отображать некоторую априорную информацию об исследуемой области, доступную по результатам исследований других геофизических методов. Такой подход позволит сузить множество допустимых

решений и выбрать из них то, которое наилучшим образом удовлетворяет априорной информации, но при этом вид функционала $\Omega(\rho)$ полностью зависит от вида априорной информации;

2) решение безусловной вариационной задачи приведет к более трудным формулам по вычислению аппроксимаций и линейных трансформант, что неизбежно приведет к ошибкам при вычислениях. Например, если в качестве функционала $\Omega(\rho)$ рассматривать норму первых производных (или, что то же самое, если решать задачу в пространстве Соболева W_2^1), то решение вариационной задачи будет иметь следующий вид:

$$\Delta \rho_r(\hat{\xi}) + \rho_r(\hat{\xi}) = \sum_{i=1}^N \lambda_i Q_r^{(i)}(\hat{\xi}), \quad 1 \leq r \leq R. \quad (8)$$

Решение такой системы в общем случае представить в аналитическом виде невозможно, особенно если требуется построение линейных трансформант поля.

Так как глобальный минимум не всегда соответствует адекватному с геолого-физической точки зрения решению, то будем находить семейство решений, каждое из которых доставляет минимум функционалу $\Omega(\rho)$ на R_x и является решением задачи (4). Кратко опишем общий алгоритм модифицированного метода S-аппроксимаций:

- 1) в рамках классического метода S-аппроксимаций находится приближенное устойчивое решение СЛАУ \hat{x}_0 ;
- 2) решается задача по минимизации функционала $\Omega(\rho)$ на множестве допустимых решений R_x . После нахождения некоторого числа локальных минимумов S находятся устойчивые приближенные решения $\hat{x}_s, 1 \leq s \leq S$, соответствующие найденным локальным минимумам;
- 3) вычисляются аппроксимации

$$\tilde{\rho}_r^{(a)}(\xi, \hat{x}_s), \quad 1 \leq r \leq R, \quad 1 \leq s \leq S;$$

- 4) из семейства функций

$$\tilde{\rho}_r^{(a)}(\xi, \hat{x}_s), \quad 1 \leq r \leq R, \quad 1 \leq s \leq S$$

выбираются такие функции при некотором оптимальном значении $r = r^*$, при котором найденные аппроксимации наилучшим образом удовлетворяют условиям поставленной задачи.

В представленном алгоритме многократное решение СЛАУ является основным этапом и занимает более 95% вычислительного времени, поэтому в первую очередь внимание уделяется именно ему.

3. Метод решения СЛАУ

Решение сразу всей системы (6) требует большого числа вычислительных операций, если размерность системы $N > 10^5$. При решении таких систем ошибок машинного округления накапливается большое количество, что нередко приводит

к нежелательным результатам. Для упрощения этой задачи предлагается изначально разбить исходную область на определенные подобласти, для каждой из которых решается своя обратная задача и, соответственно, своя СЛАУ. Затем решается вся система с нулевым приближением, равным объединению всех решений (в связи с принципом суперпозиции потенциальных полей эта процедура корректна). Такой подход позволит значительно уменьшить общее количество вычислительных операций, если будет найдено хорошее нулевое приближение. Если же матрицу для всей области невозможно разместить в оперативной памяти компьютера, то можно применить процедуру склеивания решения на границе блоков, что позволит решать задачи сверхбольших размерностей и на персональных компьютерах.

Традиционное разбиение области на блоки одинаковых размеров неэффективно по двум причинам:

- 1) трудно определить оптимальное количество блоков;
- 2) блоки могут разделять некоторые аномалии гравитационного поля, которые относятся к одному и тому же крупному геологическому объекту. В результате нулевое приближение будет неадекватно описывать поведение всей системы и не приведет к увеличению производительности алгоритма.

Поэтому авторами был предложен *блочный метод контрастирования* (БМК), который состоит в разбиении исходной области на подобласти локальных (наиболее контрастных) аномалий. Полученные блоки будут отображать различные участки аномального гравитационного поля, которые создаются приблизительно одним набором геологических тел.

Вначале определяется общее количество экстремумов поля T , которые в дальнейшем будут рассматриваться как «теоретические центры» аномалий. При этом из-за наличия помехи во входных данных из рядом лежащих экстремумов выбирается минимальный, если экстремум является локальным минимумом, или максимальный, если экстремум является локальным максимумом. Чтобы верно определить границы аномалий, необходимо оценить их интенсивность:

$$u_{x_1}^t = \max_{x_1} \frac{\left| u\left(\dot{M}^t\right) - u\left(\dot{M}_{x_1}^t\right) \right|}{\rho_{eucl}\left(\dot{M}^t, \dot{M}_{x_1}^t\right)},$$

$$u_{x_2}^t = \max_{x_2} \frac{\left| u\left(\dot{M}^t\right) - u\left(\dot{M}_{x_2}^t\right) \right|}{\rho_{eucl}\left(\dot{M}^t, \dot{M}_{x_2}^t\right)}, \quad (10)$$

$$1 \leq t \leq T,$$

где $u(M)$ – исходное поле, заданное в трехмерном пространстве, $\dot{M}^t = \left(x_1^t, x_2^t, x_3^t\right)$ – координаты «теоретического центра» аномалии, $\dot{M}_{x_1}^t$ – ближайшие по оси OX_1 точки к \dot{M}^t , $\dot{M}_{x_2}^t$ – ближайшие по оси OX_2 точки к \dot{M}^t , $\rho_{eucl}(M^s, M^t)$ – трехмерное евклидово расстояние между точками M^s и M^t .

Далее для каждой из точек рельефа $M^i = (x_1^i, x_2^i, x_3^i)$, $1 \leq i \leq N$ поочередно проверяется условие, по которому она войдет в блок с центром $\dot{M}^t = \left(x_1^t, x_2^t, x_3^t\right)$:

$$\left| u\left(M_i\right) - u\left(\dot{M}^t\right) \right| \leq u_{x_1}^t \rho_{x_1}\left(M_i, \dot{M}^t\right) + u_{x_2}^t \rho_{x_2}\left(M_i, \dot{M}^t\right) \leq \rho_T,$$

$$\rho_T = \frac{\sqrt{\left(x_{1,max} - x_{1,min}\right)^2 + \left(x_{2,max} - x_{2,min}\right)^2 + \left(x_{3,max} - x_{3,min}\right)^2}}{\sqrt{T}}, \quad (11)$$

$$\rho_{x_1}\left(M_i, \dot{M}^t\right) = \sqrt{\left(x_1^i - x_1^t\right)^2 + \left(x_3^i - x_3^t\right)^2},$$

$$\rho_{x_2}\left(M_i, \dot{M}^t\right) = \sqrt{\left(x_2^i - x_2^t\right)^2 + \left(x_3^i - x_3^t\right)^2}, \quad 1 \leq i \leq N, 1 \leq r \leq R.$$

где $(x_{1,max}, x_{2,max}, x_{3,max})$ и $(x_{1,min}, x_{2,min}, x_{3,min})$ – координаты двух наиболее удаленных друг от друга точек наблюдения. Таким образом, ρ_T представляет собой характерный размер подобласти в зависимости от количества блоков разбиения T . Если размер N_{t^*} блока с номером t^* , определенный по соотношению (11), мал по сравнению с общим числом точек измерений $N_{t^*} \leq 10\sqrt{N}$, то этот блок объединяется с блоком, расстояние между центрами которых минимально.

Далее для каждой подобласти решается своя обратная задача модифицированным методом S-аппроксимаций, в рамках которого решается СЛАУ со следующими ограничениями:

$$\frac{0,9N_t}{N} \delta_{min}^2 \leq \|\delta f_t\|_E^2 \leq \frac{1,1N_t}{N} \delta_{max}^2, \quad 1 \leq t \leq T, \quad (12)$$

где $\|\delta f_t\|_E^2$ – квадрат нормы ошибки в t -й подобласти. В конце все решения объединяются и передаются в качестве нулевого приближения для решения всей СЛАУ, чтобы «сгладить» результирующее решение.

Для решения СЛАУ, возникающей в рамках модифицированного метода S-аппроксимаций, авторами был разработан алгоритм, основанный на регуляризации известного трехслойного метода Чебышева [16]. Основной недостаток методов чебышевского

типа состоит в необходимости знания максимального и минимального собственных значений, от которых напрямую зависит скорость сходимости алгоритма. Максимальное собственное значение можно за небольшое число итераций (30-40) найти с высокой степенью точности при помощи степенного метода [17]. Минимальное же собственное значение было предложено рассматривать как дополнительный стабилизирующий параметр регуляризации, значение которого меняется с каждым шагом итерации. Подробное описание разработанного метода приводится в статье [16]. Опишем алгоритм предложенного регуляризованного трехслойного итерационного метода Чебышева:

1) вместо исходной системы (6) рассматривается ее регуляризованный аналог:

$$(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{S})x = f_\delta, \quad (13)$$

где $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T > \mathbf{0} - N \times N$ – матрица, в простейшем случае полагается равной единичной, α – параметр регуляризации;

2) на начальном этапе параметр регуляризации выбирается исходя из свойств помехи и матрицы \mathbf{A} :

$$\alpha_0 = \frac{\delta_{max}^2 + \delta_{min}^2}{\|f_\delta\|_E^2} \cdot \frac{a_{max}}{L_A}; \quad a_{max} = \max_{1 \leq i \leq N} a_{ii}, \quad (14)$$

где L_A – максимальное собственное значение матрицы \mathbf{A} ;

3) максимальное собственное значение L_α матрицы $\mathbf{A} + \alpha \mathbf{S}$ вычисляется при помощи степенного метода [17]. СЛАУ (13) решается при помощи трехслойного метода Чебышева [18] при $\alpha = \alpha_0$ с дополнительным стабилизирующим параметром регуляризации l_α :

$$\begin{aligned} x_\alpha^{i+1} &= \beta_\alpha^{i+1} (\mathbf{E} - \tau_\alpha (\mathbf{A} + \alpha \mathbf{S})) x_\alpha^i + (1 - \beta_\alpha^{i+1}) x_\alpha^{i-1} + \beta_\alpha^{i+1} \tau_\alpha f_\delta, \\ x_\alpha^1 &= (\mathbf{E} - \tau_\alpha (\mathbf{A} + \alpha \mathbf{S})) x_\alpha^0 + \tau_\alpha f_\delta, \quad s = 1, 2, \dots, x_\alpha^0 \in \mathbb{R}^N, \\ \tau_\alpha &= \frac{2}{L_\alpha + l_\alpha}, \quad \beta_\alpha^{i+1} = \frac{4}{4 - \tau_\alpha^2 \beta_\alpha^i}, \quad \beta_\alpha^1 = 2, \quad \tau_\alpha = \frac{L_\alpha - l_\alpha}{L_\alpha + l_\alpha}, \quad (15) \\ l_\alpha &= c^i L_\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где \mathbf{E} – единичная $N \times N$ -матрица, $0 < c < 1$ – задаваемая константа. Такой подход обоснован, так как в предельном переходе $l_\alpha \rightarrow L_\alpha$ трехслойная схема Чебышева (15) переходит в двухслойную схему простой итерации [18]. Таким образом мы рассматриваем семейство итерационных методов с стабилизирующим параметром регуляризации l_α . Многочисленными численными экспериментами было показано, что подобранный в формуле (15) таким образом параметр регуляризации l_α значительно ускоряет сходимость алгоритма по сравнению с выбором $l_\alpha = const$ (см., например, [16, 19]);

4) находится множество значений $\alpha_k, 1 \leq k \leq K$ и соответствующим им допустимые решения $\hat{x}_{\alpha_k}, 1 \leq k \leq K$, для которых выполняется неравенство (7);

5) из полученного множества допустимых решений $\hat{x}_{\alpha_k}, 1 \leq k \leq K$ отбираются те $\tilde{x}_{\alpha_k}, 1 \leq k \leq K^*$, которые доставляют минимум следующему функционалу:

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha) &= \left(\|\mathbf{A}\hat{x}_\alpha\|_E^2 - \|f_\delta\|_E^2 + \|\mathbf{A}\hat{x}_\alpha - f_\delta\|_E^2 \right)^2 + (Sx, x)^2 + \\ &+ \left(\|\mathbf{A}\hat{x}_\alpha - f_\delta\|_E^2 - \delta_{min}^2 \right)^2 + \left(\|\mathbf{A}\hat{x}_\alpha - f_\delta\|_E^2 - \delta_{max}^2 \right)^2. \quad (16) \end{aligned}$$

Функционал такого вида соответствует априорной информации, использующейся при решении обратных задач геофизики методом линейных интегральных представлений [12]. Таким образом находим множество качественных решений

$$Z_x = \{\tilde{x}_{\alpha_k}, 1 \leq k \leq K^*\};$$

6) результирующее решение ищется как усреднение множества качественных решений Z_x с некоторыми весовыми коэффициентами p_k :

$$\tilde{x} = \sum_{k=1}^{K^*} p_k \tilde{x}_{\alpha_k}, \quad p_k > 0, \quad \sum_{k=1}^{K^*} p_k = 1. \quad (17)$$

4. Параллельный алгоритм решения обратной задачи

Алгоритм решения можно разбить на три этапа. На первом этапе область делится на подобласти локальных аномалий в рамках работы БМК. На втором этапе для каждой из подобластей решается своя обратная задача. На третьем этапе решается вся система с соответствующим нулевым приближением, полученным на втором этапе. Если первый этап занимает всего 5-7% (в зависимости от характера поля) от общего вычислительного времени, то вторые два этапа занимают оставшееся время. Так как алгоритмы второго и третьего этапа полностью идентичны, то при разработке параллельной реализации необходимо прежде всего распараллелить итерационный метод решения СЛАУ. Благодаря простоте итерационной схемы Чебышева построение параллельного алгоритма сводится к блочному разбиению системы по строкам. Параллельный алгоритм реализован с использованием библиотеки MPI для поддержки многопроцессорных вычислений.

4.1. Параллельный алгоритм БМК

Наиболее эффективным представляется способ распараллеливания, когда для каждого вычислительного узла запускается свой алгоритм БМК. Обозначим через P общее число использующихся при

решении процессоров. Исследуемая область D разбивается на P одинаковых непересекающихся подобластей D_p^{par} , $1 \leq p \leq P$. Процессору с номером p на вычисление передается свой блок D_p^{par} , для которого запускается алгоритм БМК. Каждым процессором находится некоторое множество экстремумов поля (оно может быть и пустым), общее количество которых передается всем процессорам в виде массива $(x_1^s, x_2^s, x_3^s, f_\delta^s)$, $1 \leq s \leq S$, где (x_1^s, x_2^s, x_3^s) – координаты s -го экстремума поля, f_δ^s – значение аномального поля в этой точке рельефа. Массив проверяется на наличие рядом расположенных блоков, где каждому процессору передается равное количество экстремумов. После корректировки полученного массива каждый процессор проверяет принадлежность отдельно взятой точки из определенной ему подобласти D_p^{par} к одному из блоков, который соответствует конкретной локальной аномалии. После этого поочередно для каждого из блоков решается своя СЛАУ. Такой алгоритм представляется наиболее эффективным, так как количество вычислений на каждом процессоре будет одинаковым из-за одинаковых исходных размеров подобластей D_p^{par} .

*4.2. Параллельный алгоритм
регуляризованного трехслойного
итерационного метода Чебышева*

Для решения СЛАУ с применением МВС используется распараллеливание системы по строкам, где каждому отдельно взятому процессору на вычисление передается свой блок:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \dots \\ \mathbf{A}_p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{\delta,1} \\ f_{\delta,2} \\ \dots \\ f_{\delta,p} \end{pmatrix} \quad (18)$$

Так как число столбцов остается неизменным и система трехслойная, то каждому процессору необходимо также знать полностью две предыдущие итерации. Объединение полученных вектор-решений и передача общего вектора всем вычислительным узлам осуществляется при помощи функции `MPI_Allgather`. Вычисление нормы и произведения матрицы на вектор также распараллеливаются по блочной структуре.

В предложенном алгоритме время, затрачиваемое на межпроцессное взаимодействие, значительно меньше времени решения СЛАУ, так как каждым процессором решается своя система независимо от другого, при этом количество вычислительных операций одинаково для каждого из них. Отдельно в программе запоминаются те значения параметра регуляризации и соответствующие им решения,

для которых норма невязки находится в заданных границах. В конце результирующее решение записывается в файл.

5. Результаты математического эксперимента

Рассматривается задача по построению модифицированной S-аппроксимации аномального гравитационного поля в региональном варианте. Исходная область от 30° до 40° северной широты и от 40° до 60° восточной долготы характеризуется сравнительно спокойным рельефом с горными поднятиями в центре. Аномальное поле создается большим количеством ($N_{об} = 1400$) геологических тел призматической формы, распределенных между сферами радиуса 6340 и 6368 км. Количество приповерхностных источников, распределенных между 6362 и 6368 км, равно 750. Модель выбиралась таким образом, чтобы избыточные (или недостаточные) плотности образовывали линейные или дугообразные линии, имитирующие резкие скачки неоднородностей. Общее число гравиметрических пунктов $N = 125\,741$. К вычисленному полю f_i в заданных точках рельефа искусственно добавлялась помеха δf_p , $1 \leq n \leq N$, распределенная на отрезке $[-0,05; 0,05]$ мГал (1 Гал = 10^{-2} см·с⁻²) таким образом, что $\|f\|_E / \|\delta f\|_E = 5,0782 \cdot 10^{-3}$. Значение $\|\delta f\|_E^2 = 104,485$, поэтому постоянные выбраны следующим образом: $\delta^2_{min} = 30$ и $\delta^2_{max} = 200$. Сеть нерегулярная, средний шаг сетки составляет 2,4'. На рис. 1 изображен рельеф исходной области, на рис. 2 – аномальное гравитационное поле. В рамках модифицированного метода S-аппроксимаций поле аппроксимировалось суммой простого и двойного слоев, распределенных на сфере радиуса $R = 6368$ км.

Число матричных элементов в СЛАУ $N \times N = 15\,810\,799\,081 \approx 1,6 \cdot 10^{10}$. Задача решалась регуляризованным итерационным методом Чебышева с применением БМК (P-BCM+CH) и без (P-CH).

Расчеты проводились на суперкомпьютере «Ломоносов» НИВЦ МГУ [20]. Эффективность E_p и ускорение S_p алгоритма в зависимости от числа используемых процессоров p вычислялись по следующей формуле:

$$S_p = T_n / T_p ; E_p = n S_p / p, p > n, \quad (19)$$

где n – минимальное число процессоров, при котором решалась задача. При таком определении эффективность E_p может оказаться больше 1. Но при этом можно определить такое оптимальное значение параметра $\eta = N/P$, при котором эффективность алгоритма будет максимальна. Такое оптимальное значение для данной параллельной реализации и для данного суперкомпьютера «Ломоносов» определит такое

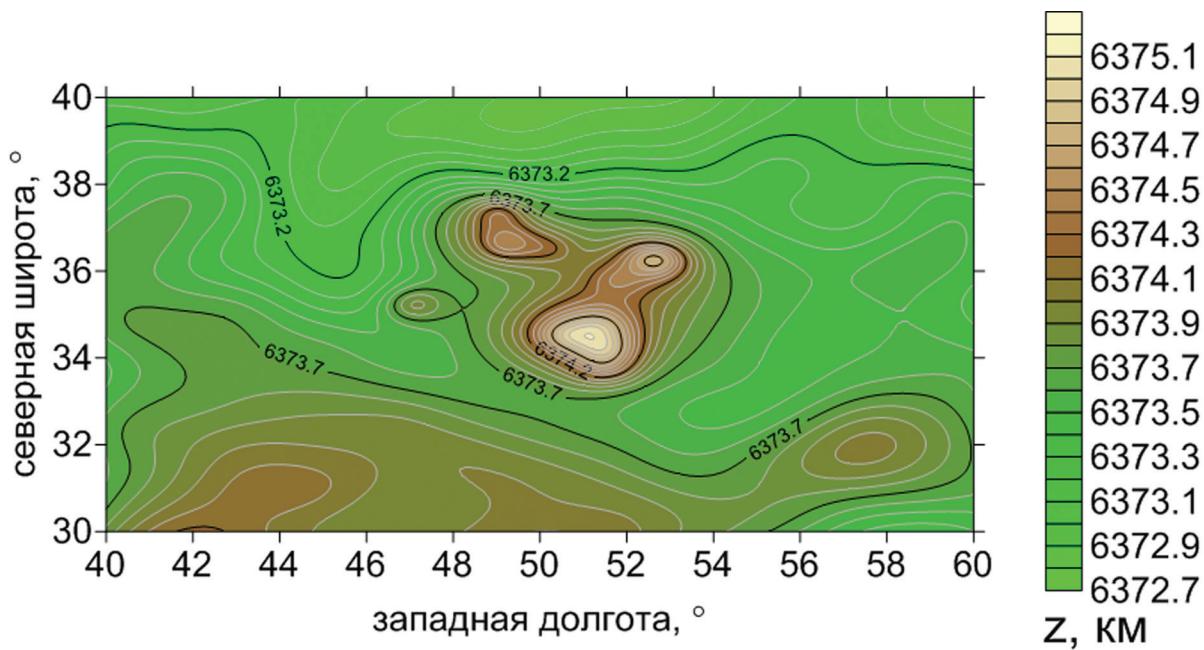


Рис. 1. Карта изолиний рельефа поверхности

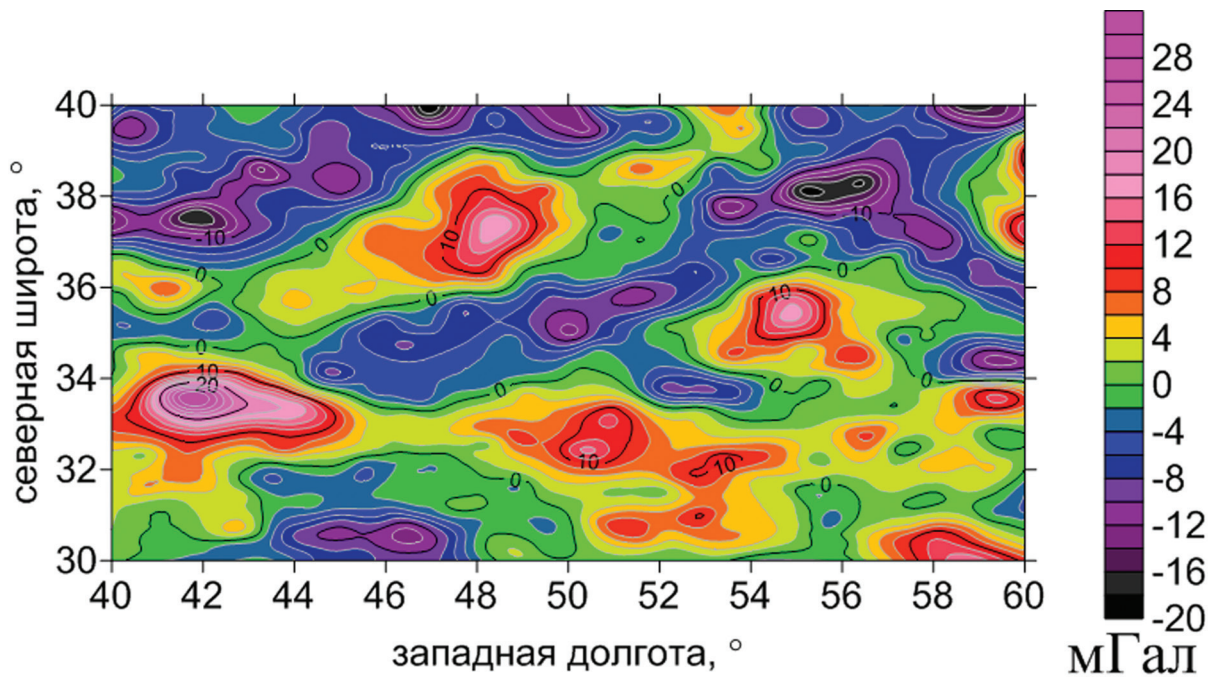


Рис. 2. Карта изоаномал

количество процессоров в зависимости от размерности задачи, при котором алгоритм наилучшим образом распределяет нагрузку между процессорами.

В табл. 1 приведены результаты вычислений, где введены следующие обозначения: t – время решения СЛАУ (МИН:СЕК), P – количество процессоров,

$$\sigma_{min} = \sqrt{\frac{\delta_{min}^2}{N}}, \sigma_{max} = \sqrt{\frac{\delta_{max}^2}{N}}, \sigma_0 = \frac{\|Ax - f_{\delta}\|_E}{\sqrt{N}}, \Delta = \frac{\|Ax - f_{\delta}\|_E}{\|f_{\delta}\|_E}. \quad (20)$$

Для достоверности проводилось несколько реализаций для каждого числа процессоров и результаты усреднялись.

Результаты, представленные в табл. 1, показывают, что искомое решение было найдено с требуемой точностью за небольшое вычислительное время. Алгоритму P-ВСМ+СН для этого потребовалось меньше времени, что связано с хорошим выбором нулевого приближения. При этом эффективность для алгоритма P-СН+ВСМ несколько ниже, чем у P-СН

Таблица 1

Результаты модифицированной S-аппроксимации

σ_{min} , мГал	σ_{max} , мГал	Метод решения СЛАУ	σ_0 , мГал	Δ	P	t	E_p
0,0155	0,0399	P-CH	0,0355	$5,0789 \cdot 10^{-3}$	100	60:57	–
					200	28:32	1,068
					300	18:49	1,08
					400	14:00	1,088
					500	11:23	1,071
					600	9:58	1,019
		P-BCM+CH	0,0355	$5,0791 \cdot 10^{-3}$	100	45:10	–
					200	21:17	1,061
					300	14:04	1,07
					400	10:30	1,076
					500	8:38	1,046
					600	7:36	0,99

Моделирование геообъектов и геопроцессов

Таблица 2

Аналитическое продолжение поля на сферу радиуса R

R, км	ϵ	θ
6371	0,618446	0,742919
6373	0,145849	0,97476
6375	0,03859	0,99831
6380	0,076806	0,995703
6400	0,21838	0,9655
6430	0,328842	0,894503

Таблица 3

Высшие производные поля

Элемент поля	ϵ	θ
u_λ	0,051828	0,997021
u_φ	0,055141	0,997123
u_R	0,659331	0,813784

при аналогичных значениях P , что объясняется тем, что при решении методом P-CH+BCM решается множество систем меньшей размерности, в результате чего расходы на взаимодействие между процессорами увеличиваются. Максимальная эффективность E_p достигается при $P=400$, то есть оптимальное значение $\eta = N/P \approx 300$.

Решения, полученные методами P-CH и P-CH+BCM, практически точно совпадают (более 99,9%), поэтому в дальнейшем для анализа будем использовать решение P-CH+BCM. Оценим адекватность полученного решения путем сравнения линейных трансформант поля (продолжения поля в нижнее и верхнее полупространства и вычисленные высших производных поля), вычисленных по теоретически заданной модели в рамках решения прямой задачи и при помощи модифицированной S-аппроксимации. Для оценки точности используются два коэффициента:

$$\epsilon = \frac{\|u_{theor} - u_{appr}\|_E}{\|u_{theor}\|_E + \|u_{appr}\|_E}, \quad \theta = \frac{(u_{theor}, u_{appr})}{\|u_{theor}\|_E \cdot \|u_{appr}\|_E}, \quad (21)$$

где u_{theor} – теоретически заданный элемент поля, u_{appr} – элемент поля, полученный при помощи S-аппроксимации, (u_{theor}, u_{appr}) – скалярное произведение. Таким образом ϵ определяет разность между элементами u_{theor} и u_{appr} , а θ является коэффициентом корреляции. В табл. 2 представлены результаты аналитического продолжения поля на сферу заданного радиуса R, а в табл. 3 – результаты вычисления высших производных поля.

В табл. 3 приняты следующие обозначения: u_λ – производная поля по долготе, u_φ – производная поля по широте, u_R – производная поля по радиусу.

Аналитические продолжения поля в верхнее полупространство находятся с высокой степенью точности: коэффициент корреляции $\theta > 0,89$, а разность $\epsilon < 0,33$ даже при продолжении поля на сферу радиуса $R = 6430$ км. Продолжения в нижнее полупространство находятся с большей погрешностью, которая увеличивается по мере уменьшения радиуса (см. табл. 2). Производные по широте и долготе найдены с высокой точностью: разница $\epsilon < 0,06$, а коэффициент корреляции $\theta > 0,99$. Производная

по радиусу найдена с большой погрешностью, однако значение коэффициента $\theta = 0,813784$ остается высоким.

Погрешности в вычислениях вертикальной производной и аналитического продолжения поля в нижнее полупространство связаны с наличием приповерхностных источников, влияние которых трудно учесть при построении аппроксимации при заданном рельефе с резкими перепадами высот (см. рис. 2), так как они «глушатся» глубоко залегающими геологическими объектами. Для сравнительного анализа ниже приведены графические результаты вычисления производной u_z (рис. 3) и аналитического продолжения поля вверх на сферу радиуса $R = 6400$ км (рис. 4). На рис. 3 единицы приведены в Этвешах ($1 \text{ E} = 10^{-9} \text{ см}^{-2}$).

6. Заключение

Предложенные параллельные алгоритмы решения СЛАУ способны находить устойчивые при-

ближенные решение плохо обусловленных систем больших размерностей, возникающих в рамках метода линейных интегральных представлений, с необходимой для геофизических целей точностью, что показано на модельном примере (см. табл. 1). Оптимальное значение $\eta^* = N/P \approx 300$, при котором наилучшим образом распределяются ресурсы между процессорами.

Точность линейных трансформант остается высокой даже при интерпретации большого объема гравиметрических данных в региональном варианте в условиях разновысотности исходных пунктов наблюдений (см. табл. 2, 3 и рис. 3, 4), что особенно важно при интерпретации данных потенциальных полей целых регионов и других планет.

Ключевые слова: параллельный алгоритм, система линейных уравнений, геофизика, большой объем данных, аппроксимация, регуляризация, обратная задача, итерационный метод, гравиметрия.

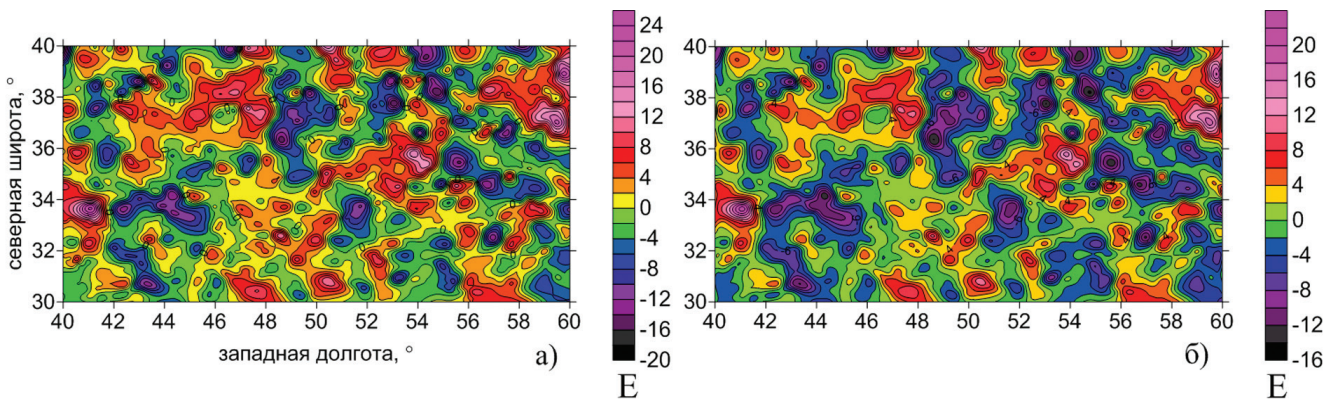


Рис. 3. Производная поля по долготе u_z :
 а) теоретически заданное;
 б) полученная с помощью модифицированной S-аппроксимации

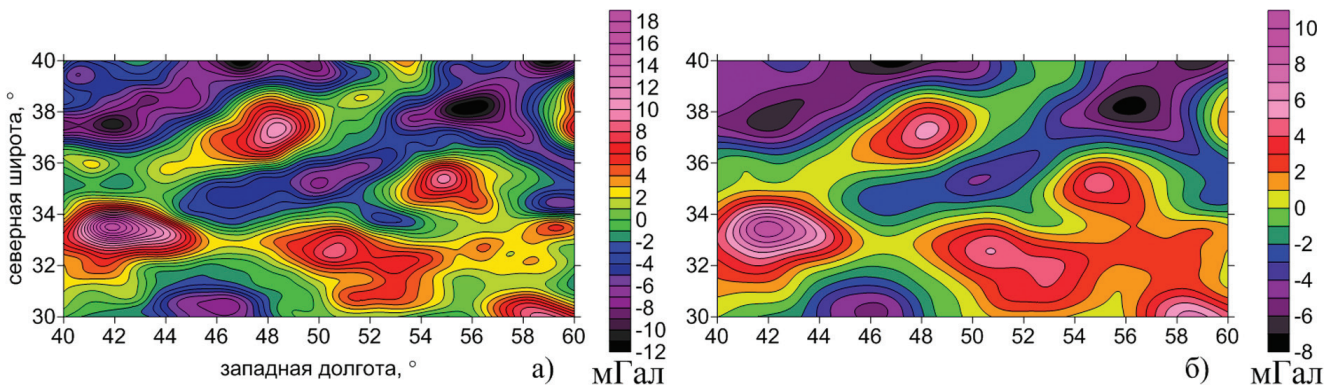


Рис. 4. Аналитическое продолжение поля на сферу радиуса $R = 6400$ км:
 а) теоретически заданное;
 б) полученное с помощью модифицированной S-аппроксимации

ЛИТЕРАТУРА

1. Акимова Е.Н., Васин В.В., Мисилов В.Е. Алгоритмы решения обратных задач гравиметрии о нахождении поверхностей раздела сред на многопроцессорных вычислительных системах // Вестник УГАТУ. – Уфа, 2014. – Т. 18, № 2. – С. 208-217.
2. Раевский Д.Н., Степанова И.Э. Об эффективности параллельного алгоритма блочного метода контрастирования решения систем линейных алгебраических уравнений большой размерности // 43-я сессия Международного научного семинара им. Д.Г. Успенского : труды международной конференции. – Воронеж : Научная книга, 2016. – С. 151-153.
3. Tscherning C.C., Kaas E., Sorensen B., Veicherts M. Multi-processing least squares collocation: Applications to gravity field // Journal of Geodetic Science. – 2013. – V. 3, N 3. – P. 219-223.
4. Долгаль А.С., Балк П.И., Деменев А.Г., Мичурин А.В., Новикова П.Н., Рашидов В.А., Христенко Л.А., Шархимуллин А.Ф. Использование метода конечных элементов при интерпретации данных гравиразведки и магниторазведки // Вестник Краунц. Науки о Земле. – 2012. – № 1 (19). – С. 108-127.
5. Ван Я., Лукьяненко Д.В., Ягола А.Г. Регуляризованное обращение полных тензорных магнитно-градиентных данных // Вычислительные методы и программирование. – 2016. – Т. 17, № 1. – С. 13-20.
6. Раевский Д.Н., Степанова И.Э. О решении обратных задач гравиметрии с помощью модифицированного метода S-аппроксимаций // Физика Земли. – 2015. – № 2. – С. 44-54.
7. Раевский Д.Н., Степанова И.Э. Модифицированный метод S-аппроксимаций. Региональный вариант // Физика Земли. – 2015. – № 2. – С. 55-66.
8. Балк П.И., Долгаль А.С., Балк Т.В., Христенко Л.А. Конечнэлементные технологии интерпретации данных гравиразведки. Монтажный метод // Геофизические исследования. – 2012. – Т. 13, № 3. – С. 18-34.
9. Бычков С.Г. Современные технологии интерпретации гравиметрических данных при исследованиях на нефть и газ [электронный ресурс] // Нефтегаз. Дело : электрон. научн. журнал. – 2005. – № 1. – URL: <http://ogbus.ru/article/sovremennye-texnologii-interpretacii-gravimetriceskix-dannyx-pri-issledovaniyah-na-nefti-gaz/> (дата обращения: 03.11.2016).
10. Бойков И.В., Бойкова А.И. Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравиразведки: монография. – Пенза : ПГУ, 2013. – 400 с.
11. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решений некорректных задач. – М. : Наука, 1990. – 232 с.
12. Страхов В.Н. и др. Актуальные проблемы геофизики и геоинформатики : сборник научных трудов. – М. : ИФЗ РАН, 2004. – 138 с.
13. Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Курс вариационного исчисления : учебное пособие для студентов. – 2-е изд. М. – Л. : Гостоптехиздат, 1950. – 296 с.
14. Страхов В.Н., Степанова И.Э. Метод S-аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (локальный вариант) // Физика Земли. – 2002. – № 2. – С. 3-19.
15. Страхов В.Н., Степанова И.Э. Метод S-аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (региональный вариант) // Физика Земли. – 2002. – №7. – С. 3-12.
16. Степанова И.Э., Раевский Д.Н., Щепетилов А.В. О повышении эффективности модифицированного метода S-аппроксимаций // Физика Земли. – 2016. – № 1. – С. 149-160.
17. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. – М. : Наука, 1970. – 564 с.
18. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М. : Наука, 1978. – 592 с.
19. Раевский Д.Н. Параллельные алгоритмы решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений больших размерностей // Суперкомпьютерные дни в России 2016 : труды международной конференции (26-27 сентября 2016 г., Москва). – М. : МГУ, 2016. – С. 912-925.
20. Воеводин Вл. В., Жуматий С.А., Соболев С.И., Антонов А.С., Брызгалов П.А., Никитенко Д.А., Стефанов К.С., Воеводин Вад. В. Практика суперкомпьютера «Ломоносов» // Открытые системы. – 2012. – № 7. – С. 36-39.